Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Telemática

UNICAMP

Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares Variantes no Tempo e de Sistemas Chaveados Lineares

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisito exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Vinícius Foletto Montagner
Mestre em Engenharia Elétrica – Universidade Federal de Santa Maria
Engenheiro Eletricista – Universidade Federal de Santa Maria

25 de Fevereiro de 2005

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres** FEEC/UNICAMP

Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres	FEEC/UNICAMP (presidente)
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella	DELET/UFRGS
Prof. Dr. Marco Henrique Terra	EESC/USP–São Carlos
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira	FEEC/UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

	Montagner, Vinícius Foletto
M76e	Estabilidade e controle de sistemas lineares variantes no tempo e de sistemas chaveados lineares / Vinícius Foletto Montagner. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.
	Orientador: Pedro Luis Dias Peres Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
	1. Estabilidade. 2. Teoria do Controle. 3. Sistemas lineares variantes no tempo. 4. Liapunov, Funções de. 5. Desigualdades matriciais. 6. Otimização matemática. I. Peres, Pedro Luis Dias. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

RMS

Título em Inglês: Stability and Control of Linear Time-Varying Systems and Switched Linear Systems
Palavras-chave em Inglês: Stability, Control theory, Linear time variant systems, Lyapunov Functions, Matrix inequalities e mathematical optimization
Área de concentração: Automação
Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica
Banca examinadora: Alexandre Sanfelice Bazanella, Marco Henrique Terra, João Bosco Ribeiro do Val, Paulo Augusto Valente Ferreira
Data da defesa: 25/02/2005

1. Modificações sugeridas pela Comissão Julgadoras que deverão ser incorporadas na versão final da tese:

Pequenas sugestões e modificações de forma, que deverão ser verificadas pelo orientador.

2. Prazo máximo para a entrega da versão final da tese na CPG: 60 **(dias).**

3. Comentários finais (se necessário):

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres (Presidente): Pedro L D Peres

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella: Bazanella

Prof. Dr. Marco Henrique Terra: Marco Henrique Terra

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val: [illegible]

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira: Paulo Augusto Valente Ferreira

Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Remetente:
Dr. Pedro L. D. Peres
DT - FEEC UNICAMP - C.P. 6101
13.081 - 970 - Campinas - SP - BRASIL
e-mail: peres@dt.fee.unicamp.br
Tel.: 19 37883759

Campinas, 29 de Março de 2005.

Declaro que o exemplar anexo da tese de doutorado de Vinícius Foletto Montagner, intituladada *Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares Variantes no Tempo e de Sistemas Chaveados Lineares* contempla as correções e sugestões formuladas pelos membros da banca, podendo portanto ser encaminhado para homologação.

Atenciosamente,

Pedro Luis Dias Peres

Resumo

Esta tese apresenta contribuições para a solução de problemas de análise de estabilidade e de síntese de controladores para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo pertencentes a um politopo e para sistemas chaveados lineares com funções de chaveamento arbitrárias através de condições na forma de desigualdades matriciais lineares baseadas em funções de Lyapunov.

Para sistemas lineares variantes no tempo (caso contínuo), são fornecidas condições de verificação de estabilidade e de cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ quando os parâmetros pertencentes a um politopo são supostos incertos e com taxas de variação limitadas. Para o problema de síntese, supondo que os parâmetros são conhecidos em tempo real, são fornecidas condições de projeto de ganhos de realimentação de estados que variam de forma não-linear com os parâmetros e que asseguram a estabilidade com um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada sujeito a taxas de variações paramétricas limitadas. No caso de taxas de variações paramétricas arbitrárias, são fornecidas condições de cômputo de ganhos que variam de forma linear (caso contínuo) ou de forma não-linear (caso discreto) com os parâmetros, assegurando a estabilidade com requisitos de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada.

Para sistemas chaveados lineares (casos contínuo e discreto), são fornecidas condições para computar ganhos chaveados de realimentação de estados que resolvem os problemas de estabilização e de controle $\mathcal{H}_\infty$, incluindo especificações de alocação de pólos, permitindo melhorar o desempenho do sistema em malha fechada sujeito a funções de chaveamento arbitrárias disponíveis em tempo real.

Exemplos numéricos incluindo problemas de controle com restrição de estrutura, de controle sob falhas de atuadores e uma aplicação em circuitos elétricos chaveados ilustram como as condições propostas reduzem o conservadorismo nos problemas de análise e de síntese das classes de sistemas dinâmicos sob investigação.

Abstract

This thesis presents contributions to the solution of problems of stability analysis and control synthesis applied to linear systems with time-varying parameters belonging to a polytope and to switched linear systems subject to arbitrary switching functions using linear matrix inequality conditions based on Lyapunov functions.

Concerning linear time-varying systems (continuous-time case), the proposed conditions assess the problems of stability analysis and computation of $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed costs when the parameters belonging to a polytope are supposed to be uncertain with bounded rates of variation. For the problem of synthesis, assuming that the parameters are available in real time, the thesis provides conditions to design state feedback gains which depend nonlinearly on the parameters and assure stability with a given $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost to the closed-loop system for the case of bounded rates of parametric variations. When the rates of parametric variations are assumed to be arbitrary, the given conditions can determine gains that depend linearly (continuous-time case) or nonlinearly (discrete-time case) on the parameters, assuring stability with $\mathcal{H}_\infty$ performance to the closed-loop system.

In the context of switched linear systems (continuous and discrete-time cases), the proposed conditions are suitable to determine switched state feedback gains that solve the problems of stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ control including pole location specifications, allowing to improve the performance of the closed-loop system subject to arbitrary switching functions available in real time.

Numerical examples including problems of structurally constrained control, robustness against actuator failures and an application on switched electrical circuits illustrate how the proposed conditions reduce the conservatism of the problems of analysis and synthesis for the classes of dynamic systems under investigation.

Agradecimentos

À FAPESP, pelo suporte financeiro e pela competência no acompanhamento das atividades técnicas relativas a este projeto.

À CAPES, pelo suporte financeiro concedido via Programa de Doutorado no Brasil com Estágio no Exterior durante o segundo semestre de 2003, quando as pesquisas relativas ao projeto foram desenvolvidas no Departamento de Engenharia Elétrica e de Ciência da Computação, da Universidade da Califórnia em Berkeley.

À FEEC, pela excelente estrutura de trabalho e pelo alto nível de seus professores e à Unicamp, pelo agradável ambiente acadêmico.

Ao professor Pedro Peres, pela excelente orientação nesta etapa de minha formação. Sua competência profissional, seu zelo com as atividades de pesquisa e com as atividades docentes, seu espírito crítico e cooperativo tornaram estes quatro anos de doutorado extremamente gratificantes. Seu bom humor, sua camaradagem e o incentivo ao crescimento de seus alunos tornaram este período de convivência leve e muito feliz.

Ao professor Laurent El Ghaoui, da Universidade da Califórnia em Berkeley, e à pesquisadora Sophie Tarbouriech, do Laboratório de Análise e Arquitetura de Sistemas, em Toulouse, pela acolhida, permitindo que parte das atividades deste trabalho fossem desenvolvidas no exterior, o que me proporcionou uma ótima experiência cultural. Ao professor Seleme Isaac Seleme Júnior, pelas precisas e pacientes informações sobre Berkeley e a José Valentim dos Santos Filho, pela gentileza com que me recebeu em Toulouse.

Aos amigos e colegas de grupo de trabalho Valter Júnior, Ricardo, Paulo e Giórgio, um grande abraço pelos desafios vencidos em conjunto, pelo valioso companheirismo e pelo alto astral. Sorte a todos!

Aos amigos e colegas do Departamento de Telemática Rúbia, Tatiane, Edvaldo, Fábio, Ricardo Coelho, Alessandro, Valter, Leandro, Edilson, Márcia, Luis, Alfredo, Luis Renato, Simone, Cristiane e Ubirajara, pela cordialidade e alegria diárias.

Aos amigos de Santa Maria, Marcio Buss, Luciana Buriol e Mario Jungbeck, que já estavam em Campinas e cujo entusiasmo com a cidade e com a Unicamp influenciaram em minha vinda para cá. Também aos amigos que reencontrei ou encontrei aqui, Vinícius Jacques Garcia, Vanessa, Amanda, Marcelo Cezar Pinto, Geomar Martins, Ricardo Machado, Gláucia Lixinski e Lídia Larangeira. Sucesso sempre!

Aos amigos de república, Ricardo Luis Külzer e César Augusto Dartora, “Il Mostro”, um grande abraço pela camaradagem, pelo convívio fraterno e respeitoso. Para mim foi uma grande satisfação podermos ter superado juntos as dificuldades iniciais, termos compartilhado de tantos momentos alegres e cômicos aqui. Aproveito para agradecer também a Antônio Alberti, Maurício Bottoli e Gean Davis Breda, por nos acompanharem no basquete em várias tardes de sábado. A Adroaldo Dartora, obrigado pela ajuda desde o começo.

Aos meus ex-colegas Daniel Bellinaso e Marcio Ceretta, que estão geograficamente longe, mas sempre próximos pela amizade.

À Gláucia, pela delicadeza, pela sensibilidade, pela honestidade, por tantos sustos quando andei na carona do teu carro, por tantas alegrias e pelas descobertas que já fizemos.

Às escolas públicas que tive a oportunidade de freqüentar e às pessoas que direta ou indiretamente participaram de minha educação: à UFSM, no seu Grupo de Eletrônica de Potência e Controle, em especial ao professor Hilton Abílio Gründling, pela minha formação como mestre. E à minha irmã Luciana, por me acompanhar naquele período. À UFSM, pela minha formação como engenheiro eletricista e aos primos Maristela e Rogério, por terem me aturado durante quatro anos da graduação e, juntamente com as primas Rosmaria e Izabel e respectivas famílias, por terem sempre me recebido com carinho. Também ao primo engenheiro André Emilio Foletto, pela valiosa ajuda durante o curso de graduação. Aos meus antigos professores das escolas de ensino médio e fundamental Dom Antônio Reis e Adelina Zanchi, de Faxinal do Soturno, RS, meu sincero obrigado pela sua dedicação.

À toda minha família, iniciando com meus bisavós que vieram da Itália para uma aventura numa América desconhecida e que, com trabalho árduo, superaram grandes dificuldades. Aos meus avós, que continuaram a batalha com fé, alegria e trabalho. Aos meus tios e primos, no campo ou na cidade, agradeço a acolhida e saúdo a todos. Aos meus pais e à minha irmã, obrigado por tudo.

Aos meus pais Almeri e Lourdes

À minha irmã Luciana

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Problemas

Lista de Lemas

Lista de Teoremas

Lista de Corolários

Lista de Comentários

Lista de Acrônimos e Notação

LFT	Linear Fractional Transformation (transformação linear fracionária)
LMI	Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)
LPV	Linear Parameter-Varying (linear variante com parâmetros)
PWM	Pulsewidth Modulation (modulação por largura de pulso)
RMS	Root Mean Square (raiz da média quadrática)
THD	Total Harmonic Distortion (taxa de distorção harmônica)
UPS	Uninterruptible Power Supply (fonte ininterrupta de energia)

$\star$	bloco simétrico nas LMIs
$\pm$	todas as combinações de sinais $+$ e $-$ devem ser verificadas
$>,\geq,<,\leq$	denotam, indistintamente, relações entre grandezas escalares ou matriciais
$M > 0$	indica que a matriz M é definida positiva
$M(t) > 0$	indica que a matriz $M(t)$ é definida positiva para todo t
t	denota a variável tempo no caso contínuo
k	denota a variável tempo no caso discreto
$\dot{P}(\alpha(t))$	o ponto sobre a variável denota derivada temporal
A	notação de matriz (letras maiúsculas do alfabeto latino)
A'	símbolo ($'$), pós-posto a um vetor ou matriz, indica operação de transposição
$\mathcal{D}$	notação de conjunto (letras maiúsculas grafadas em modo caligráfico)
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbf{I}$	matriz identidade de dimensão compatível com o problema
$\mathbf{0}$	matriz de zeros de dimensão compatível com o problema
$\Vert x(t)\Vert_2$	norma 2 de $x(t) \in \mathbb{R}^n$, dada por $\Vert x(t)\Vert_2 = \sqrt{\int_0^\infty x(t)'x(t)dt}$
$\Vert x(k)\Vert_2$	norma 2 de $x(k) \in \mathbb{R}^n$, dada por $\Vert x(k)\Vert_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)'x(k)}$
$\mathcal{L}_2$	espaço de sinais $x(t)$ Lebesgue mensuráveis que satisfazem $\Vert x(t)\Vert_2 < \infty$
ℓ_2	espaço de sinais $x(k)$ Lebesgue mensuráveis que satisfazem $\Vert x(k)\Vert_2 < \infty$
RMS	valor RMS de um sinal $v(t) \in \mathbb{R}$ com período T, dado por $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2 dt}$
THD	definida como a razão entre o valor RMS das componentes harmônicas e o valor RMS da fundamental de um sinal $v(t) \in \mathbb{R}$ com período T

Capítulo 1

Introdução

As crescentes exigências de desempenho de sistemas físicos vêm impondo o uso de ferramentas de análise e de síntese cada vez mais sofisticadas e também mais eficientes do ponto de vista da complexidade computacional associada aos algoritmos. Visando uma representação fiel e acurada dos fenômenos que ocorrem nos sistemas reais, os sistemas baseados em modelos lineares têm incorporado cada vez mais informações sobre a parte não-modelada, como a existência de ruídos, não-linearidades, atrasos e dinâmicas espúrias. A inclusão de incertezas paramétricas é outro aspecto muito explorado na modelagem do sistema, sendo bastante usuais a representação por transformação linear fracionária (do inglês, *Linear Fractional Transformation* – LFT) e as representações afim e politópica com parâmetros incertos considerados como invariantes no tempo ou sujeitos a taxas de variação limitadas ou arbitrárias (veja por exemplo os livros [6], [7], [10], [17], [18], [34], [66], [84] para um panorama geral sobre problemas de controle de sistemas dinâmicos).

A abordagem baseada em funções de Lyapunov tem sido, sem dúvida, muito importante para tratar problemas de análise de estabilidade e de síntese de controladores para sistemas com modelos lineares que incluem parâmetros incertos, sendo que dentre as inúmeras técnicas de controle desenvolvidas nos últimos anos podem ser citadas as baseadas em controle robusto e em controle com critérios $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ [13], [35], [41], [47], [48], [50], [52], [64], [67], [93], em filtragem robusta [45] e filtragem robusta $\mathcal{H}_\infty$ com restrição de alocação de pólos [86], [87], [88]. Uma característica comum dessas abordagens é a transformação do problema de controle em um problema convexo de otimização, na maioria das vezes descrito através de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs), que podem ser resolvidas de maneira eficiente por algoritmos baseados em pontos interiores (veja [17], [36] para uma discussão abrangente sobre LMIs), disponíveis em pacotes especializados como o *LMI Control Toolbox* do Matlab [44]. Várias classes de funções de Lyapunov têm sido exploradas para tratar problemas de análise de sistemas e de síntese de controladores utilizando LMIs como ferramenta computacional, como por exemplo as funções de Lyapunov quadráticas [9], [13] e quadráticas por partes [1], [63], as funções de

Lyapunov homogêneas [21] e poliedrais [15] e as funções de Lyapunov dependentes de parâmetros [11], [40], [42], [56], [69], sendo que a escolha da função depende do tipo de incerteza a ser tratada e da acurácia desejada, influindo também no esforço computacional necessário.

1.1 Sistemas lineares variantes no tempo: estabilidade

Resultados importantes para a análise de estabilidade de sistemas lineares contínuos no tempo com incertezas politópicas foram obtidos a partir de funções de Lyapunov quadráticas que utilizam uma mesma matriz (fixa) para verificar a estabilidade de todo o domínio de incertezas [9]. Graças à convexidade, a existência de solução para um conjunto de LMIs descrito nos vértices de um politopo é suficiente para garantir a estabilidade de todo o domínio politópico. Esse resultado é conhecido como estabilidade quadrática e serviu de ponto de partida para várias condições de análise de estabilidade, filtragem e síntese robustas (veja [17] e referências internas). É interessante mencionar que a estabilidade quadrática permite avaliar, por meio de testes de factibilidade de LMIs, a estabilidade de sistemas com parâmetros sujeitos a taxas de variação arbitrárias, o que inclui desde o caso de parâmetros incertos invariantes no tempo até o caso em que os parâmetros têm taxas de variação ilimitadas. O uso de uma mesma matriz de Lyapunov para verificar a estabilidade quadrática leva a um teste com baixa complexidade numérica e com extensões diretas para tratar problemas de cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ [17], [48], [89], [94], mas muito freqüentemente os resultados obtidos na avaliação de domínios de estabilidade e em estimativas de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são conservadores (veja [30], [31], [70] para estudos comparativos no caso invariante no tempo). Resultados menos conservadores podem ser obtidos com o uso de funções de Lyapunov mais complexas, como por exemplo as funções de Lyapunov quadráticas por partes. Essas funções têm sido particularmente úteis no estudo de sistemas lineares descritos por meio de partições no espaço de estados [1], [37], [38], [39], [63], [98], [118]. No contexto de sistemas lineares com taxas de variações paramétricas arbitrárias, os resultados baseados em funções de Lyapunov quadráticas por partes são menos conservadores do que os obtidos com funções quadráticas, ao preço de testes com uma complexidade numérica significativamente maior. Em [118], utilizando a chamada *S-procedure*, são propostas condições do tipo LMI dependentes de parâmetros para o teste da estabilidade de sistemas envolvendo a combinação convexa de duas matrizes e, em [1], essas condições são generalizadas para N vértices, mas o problema a ser resolvido envolve a solução de LMIs parametrizadas com buscas de um ponto factível num espaço não limitado de N parâmetros. Outras classes de funções permitem tratar o problema de estabilidade do sistema com parâmetros com taxas de variações arbitrárias, como por exemplo as funções de Lyapunov homogêneas [21] e as funções de Lyapunov poliedrais [15]. Entretanto, os resultados que assumem taxas de variações paramétricas arbitrárias podem ser conservadores quando os parâmetros do sistema apresentam taxas de variação limitadas.

Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros têm sido utilizadas para verificar a estabilidade de sistemas lineares variantes no tempo (caso contínuo), como em [2], [11], [33], [40], [42], [56], [60], [69]. A principal dificuldade com essa abordagem era a ausência de uma maneira sistemática de construir a função de Lyapunov, levando ao uso de procedimentos de discretização exaustiva do espaço paramétrico (alto esforço computacional). Recentemente, no contexto de sistemas lineares incertos invariantes no tempo, surgiram testes descritos em termos de LMIs definidas nos vértices de um domínio politópico de incertezas e que têm como solução um conjunto de matrizes de Lyapunov cuja combinação convexa produz uma função de Lyapunov dependente linearmente de parâmetros, utilizada para garantir a estabilidade robusta do sistema [46], [91]. Condições menos conservadoras apareceram em [97] e, mais recentemente, em [72], englobando os resultados anteriores e também fornecendo boas estimativas de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ [30] e $\mathcal{H}_\infty$ [31]. No contexto de sistemas com taxas de variações paramétricas limitadas, em [43] são apresentadas condições suficientes na forma de LMIs para a estabilidade robusta e para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares com dependência afim em parâmetros incertos variantes no tempo supostos limitados. Esses resultados ainda são conservadores, uma vez que a convexidade da derivada da função de Lyapunov em relação a cada um dos parâmetros (chamada de multiconvexidade) deve ser imposta, implicando que a análise nos vértices do politopo de incertezas (geralmente uma condição apenas necessária) produz avaliações conclusivas sobre a estabilidade global. Essa propriedade também é utilizada em [5] para a estabilidade e desempenho robustos de sistemas incertos na forma politópica. Em muitos casos, são assumidas hipóteses restritivas na estrutura da incerteza [33], [60], [61], [102], ou que os parâmetros incertos podem ser fatorados de modo conveniente, como no caso da chamada estabilidade biquadrática [110], [111], com extensões para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ em [27]. É importante mencionar que estudos de estabilidade e desempenho de sistemas lineares incertos invariantes no tempo mostram que o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros com maior complexidade permite reduzir o conservadorismo das condições LMIs utilizadas, com o aumento do custo computacional dos testes [16], [22], [81], [90].

O problema da análise da estabilidade de sistemas lineares discretos no tempo com parâmetros sujeitos a taxas de variação arbitrárias pode ser tratado por meio de funções de Lyapunov quadráticas [9], [17], com extensões para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ [50], [51], [89]. Como no caso contínuo, a factibilidade de um teste de LMIs nos vértices de um politopo é suficiente para garantir a estabilidade de todo o politopo para parâmetros com taxas de variação arbitrárias, mas os resultados podem ser conservadores. Resultados menos conservadores podem ser obtidos com funções de Lyapunov quadráticas por partes [1], [118], com condições de testes descritas em termos de LMIs parametrizadas. No caso de sistemas lineares discretos com incertezas paramétricas invariantes no tempo, o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros [28], [29], [91] permite reduzir o conservadorismo dos resultados pela exploração do aumento do número de variáveis do problema ou com o aumento do número de LMIs dos testes [96], sendo que o conservadorismo pode ser ainda mais reduzido combinando as duas abordagens (aumento do número de variáveis e de LMIs), como em [72]. Extensões para tratar do cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para o caso discreto são dadas em [30] e [31], respectivamente. No caso de sistemas lineares discretos com incertezas politópicas sujeitos a taxas de variações paramétricas arbitrárias, um teste convexo descrito em termos de LMIs fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros na forma afim que garante a estabilidade do sistema [24]. Esse resultado contém a estabilidade quadrática e, em [25], é estendido para tratar do cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$. As condições de [24] também são utilizadas para o projeto convexo de controladores, mas somente para casos particulares em que algumas das matrizes do sistema são supostas fixas e invariantes no tempo.

1.2 Sistemas lineares variantes no tempo: controle

Um resultado importante para o controle robusto por realimentação de estados aplicado a sistemas lineares contínuos no tempo sujeitos a taxas de variações paramétricas arbitrárias é baseado em funções de Lyapunov quadráticas (estabilizabilidade quadrática, [13], [47]). Esse resultado, obtido a partir de uma simples transformação de variáveis na condição da estabilidade quadrática, fornece uma condição suficiente para o cômputo de ganhos robustos capazes de estabilizar o sistema em malha fechada a partir da solução de um conjunto de LMIs descritas nos vértices do politopo de incertezas. O uso de ganhos robustos simplifica a implementação do controlador, pois não requer nenhuma informação além do acesso ao vetor de estados do sistema. A estabilizabilidade quadrática é testada através de uma condição de baixa complexidade numérica, que permite extensões para tratar problemas de controle $\mathcal{H}_\infty$ [49], [67] e de controle com restrições de alocação de pólos [55], [87]. Entretanto, pelo fato de usar uma mesma matriz de Lyapunov para verificar a estabilidade de todo o domínio de incertezas, os resultados muitas vezes são conservadores. Estratégias de ganhos escalonados (do inglês, *gain scheduling*) podem reduzir o conservadorismo na solução do problema de estabilização de sistemas lineares variantes no tempo, bem como podem fornecer melhores desempenhos para o sistema em malha fechada quando comparados ao desempenho obtido com estratégias de ganhos fixos, ao preço de se medir ou estimar em tempo real os parâmetros variantes no tempo para atualizar o ganho do controlador (veja [74], [99] e referências internas para detalhes sobre estratégias de ganho escalonado). Essa técnica de controle é particularmente interessante para tratar sistemas sujeitos a variações paramétricas, como é o caso de sistemas lineares variantes com parâmetros (do inglês, *Linear Parameter-Varying* – LPV) e de sistemas não-lineares modelados como sistemas LPV. A abordagem clássica para a síntese de controladores de ganhos escalonados é projetar um controlador para cada elemento de uma família de modelos da planta e então, baseado na medição dos parâmetros variantes no tempo, escolher o ganho do controlador utilizando algum método de interpolação [107]. Embora os resultados possam ser melhorados através de um refinamento da discretização do espaço paramétrico (ao preço de um aumento no esforço computacional), esse procedimento não garante a estabilidade e o desempenho especificado para o sistema em malha fechada, exceto em casos especiais em que os parâmetros variam de modo lento [104], [105]. É interessante mencionar que uma classe de controladores LPV com critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ aplicada a sistemas lineares variantes no tempo em domínios politópicos foi estudada por meio da estabilidade quadrática em [12], [23], [68], mas somente para casos particulares em que algumas das matrizes do sistema são assumidas conhecidas e invariantes no tempo, o que permite reduzir o problema a um problema convexo de otimização e, em alguns casos, evitar o uso de interpolações. Em [113], uma abordagem que combina métodos de análise de sistemas politópicos com técnicas de escalonamento convencionais para resolver o problema de análise robusta de sistemas incertos que admitem uma representação por LFT é estendida para tratar controladores de ganho escalonado. O projeto de ganho escalonado para sistemas politópicos com parâmetros com derivadas limitadas foi abordado por meio de LMIs em [3], [114], [116]. Nesse caso, as condições devem ser resolvidas através de discretização do espaço paramétrico em um número limitado de pontos, o que resulta em um teste com um número finito de LMIs. De um modo geral, entretanto, os resultados que utilizam discretização do espaço dos parâmetros em um número finito de pontos para calcular controladores locais que garantam estabilidade e desempenho podem não ser confiáveis e sua complexidade numérica cresce rapidamente. Para evitar a necessidade de discretização do espaço paramétrico, muitas vezes são assumidas hipóteses restritivas sobre o conjunto de incertezas [8], [115]. Quando a planta e o controlador admitem uma representação LFT, a existência de um controle estabilizante pode ser determinada por um teste com um número finito de LMIs [4], [61], [85], [102], [103]. Também é possível computar ganhos LPV estabilizantes incluindo um critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ quando os parâmetros do sistema podem ser fatorados de modo conveniente [27]. Quando a estrutura da incerteza não é conhecida e os parâmetros possuem taxas de variação limitadas, o problema de síntese torna-se mais complexo.

No caso da estabilização de sistemas lineares discretos no tempo sujeitos a taxas de variações paramétricas arbitrárias através de ganhos robustos, a estabilizabilidade quadrática [13], [49] é importante por se tratar de uma condição convexa de baixa complexidade numérica para o cômputo de ganhos fixos estabilizantes para o sistema, extensível para tratar critérios de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ como em [52]. O conservadorismo relacionado ao uso de uma matriz de Lyapunov fixa pode ser reduzido quando se usa uma função de Lyapunov dependente de parâmetros para computar ganhos robustos para o sistema [78]. Os resultados de [78] são extensões de [24], que fornecem uma condição convexa de síntese de ganhos LPV estabilizantes para sistemas com matrizes dinâmicas supostas dependentes de parâmetros com taxas de variação arbitrárias e com matrizes de controle supostas conhecidas e invariantes no tempo. A condição de projeto de [24] possui, além das variáveis da função de Lyapunov, outras variáveis de folga que são utilizadas para a geração do ganho LPV estabilizante, o que permite tratar com menos conservadorismo problemas de controle com restrição de estrutura, por exemplo. A extensão desses resultados para o cômputo de controle com ganhos LPV que asseguram a estabilidade do sistema em malha fechada com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é dada em [25], ainda para o caso em que as matrizes de controle do sistema são supostas conhecidas e invariantes no tempo.

1.3 Sistemas chaveados lineares: estabilidade e controle

A abordagem baseada em funções de Lyapunov pode ser aplicada a sistemas chaveados lineares, que são uma classe de sistemas híbridos compostos de vários subsistemas lineares (modos de operação) e uma regra de chaveamento indicando o subsistema ativo em cada instante de tempo [32], [76]. Entre os sistemas dinâmicos que exibem comportamento chaveado podem ser citados os circuitos elétricos com chaves eletrônicas, que definem a importante família dos conversores estáticos de potência [65], processos bioquímicos como em [54] e todos os sistemas sujeitos a leis de controle chaveado [75], [100], [101] e [106]. É importante mencionar que estratégias de controle chaveado são úteis para melhorar o desempenho de sistemas, para garantir robustez e também para implementar leis de controle adaptativo [58]. Note também que sistemas chaveados podem ser utilizados para modelar sistemas sujeitos a falhas nos atuadores, isto é, sistemas que podem ter o número de entradas de controle modificado abruptamente [100]. No contexto de sistemas chaveados com subsistemas lineares contínuos no tempo, os temas de análise de estabilidade e controle têm sido bastante estudados nos últimos anos [59], [92], [95] e, como comentado em [76], os problemas básicos são: *a)* encontrar condições que garantam a estabilidade do sistema (ou encontrar uma lei de controle que garanta a estabilização, ou que o sistema atinja algum índice de desempenho) sob qualquer regra de chaveamento; *b)* encontrar uma estratégia de chaveamento que garanta a estabilidade do sistema (ou a sua estabilização, ou que o mesmo atinja algum índice de desempenho). Esses e outros temas como os problemas de controlabilidade [109], [117] têm estado sob investigação, com especial atenção aos sistemas chaveados lineares [108], [120]. Uma abordagem relevante para o estudo dos problemas de estabilidade e de controle dessa classe de sistemas é, sem dúvida, a abordagem baseada em funções de Lyapunov. Por exemplo, funções de Lyapunov quadráticas com matrizes fixas permitem tratar sistemas que variam no tempo de modo arbitrariamente rápido, englobando assim os sistemas chaveados.

Com respeito à estabilidade de sistemas chaveados lineares autônomos, uma função de Lyapunov comum existe se todas as matrizes são assintoticamente estáveis e o produto de duas a duas é comutativo [82]. A condição LMI de estabilizabilidade quadrática com ganhos fixos [13] pode ser utilizada na estabilização de sistemas com parâmetros incertos variantes no tempo de modo arbitrário, sendo portanto válida também para sistemas chaveados. A principal desvantagem da estabilização quadrática por meio de ganho fixo é que os resultados podem ser conservadores. Por exemplo, o sistema chaveado pode ser estabilizável por estratégias de controle chaveado, mas não admite uma realimentação estabilizante com o mesmo ganho fixo para todos os subsistemas. O problema da estabilizabilidade quadrática de sistemas chaveados lineares com subsistemas incertos com incertezas em domínios politópicos foi estudado por meio de uma estratégia de chaveamento dependente de estados em [119]. O uso de funções de Lyapunov quadráticas para a estabilização de sistemas chaveados lineares com incertezas estruturadas foi explorado em [62], sendo fornecida uma condição de projeto descrita em termos de LMIs parametrizadas cuja solução permite determinar um conjunto de ganhos chaveados que estabilizam o sistema para uma dada função de chaveamento. Outras classes de funções de Lyapunov têm sido utilizadas para reduzir o conservadorismo da síntese, tais como as funções quadráticas por partes [63] ou múltiplas [19] mas, em geral, a solução numérica requer um elevado esforço computacional e/ou as regras de chaveamento devem ser conhecidas *a priori*, resultando na maioria dos casos em estratégias de chaveamento que dependem de partições no espaço de estados [63]. Em particular, para o caso discreto no tempo, as condições de análise e síntese para sistemas lineares incertos sujeitos a taxas de variações paramétricas arbitrárias baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros [24], [25] (incluindo especificações de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$) podem ser diretamente aplicadas a sistemas chaveados lineares [26].

1.4 Estrutura da tese

Esta tese trata problemas de análise de estabilidade e de síntese de controladores para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo pertencentes a um politopo e para sistemas chaveados lineares com funções de chaveamento arbitrárias utilizando a abordagem baseada em funções de Lyapunov e testes na forma de LMIs, conforme detalhado a seguir.

- Capítulo 2: descreve os sistemas lineares variantes no tempo e os sistemas chaveados lineares que serão estudados e apresenta condições do tipo LMI da literatura para a análise da estabilidade, cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e para o cálculo de ganhos de leis de controle por realimentação de estados que estabilizam o sistema, incluindo o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e especificações de alocação de pólos. Enuncia seis problemas de análise de estabilidade e de síntese de controladores para sistemas lineares variantes no tempo, no caso contínuo, e dois problemas de síntese de controladores para o caso discreto, sendo que condições LMI para a solução desses problemas (contribuições da tese) são dadas no Capítulo 3. Para sistemas chaveados lineares, são enunciados quatro problemas de síntese de controladores para o caso contínuo e quatro problemas de síntese para o caso discreto, cujas soluções na forma de condições LMI (contribuições da tese) são dadas no Capítulo 4.

- Capítulo 3: apresenta condições suficientes na forma de LMIs para resolver os seis problemas de análise e de síntese para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo pertencentes a um politopo (caso contínuo), a saber: análise da estabilidade e cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema sujeito a taxas de variações paramétricas limitadas, cálculo de ganhos LPV que estabilizam quadraticamente o sistema em malha fechada, incluindo o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, para o caso de taxas de variações paramétricas arbitrárias e cálculo de ganhos que dependem de parâmetros de forma não-linear que estabilizam o sistema em malha fechada, incluindo critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, para o caso em que as taxas de variações paramétricas são limitadas. Também são apresentadas condições na forma de LMIs suficientes para resolver os dois problemas enunciados para sistemas lineares variantes no tempo (caso discreto): problema de cômputo de ganhos que dependem de parâmetros de forma não-linear capazes de estabilizar e de incluir o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para o caso de taxas de variações paramétricas arbitrárias. As condições apresentadas no decorrer do capítulo são baseadas em funções de Lyapunov quadráticas e afins. O capítulo inclui comentários sobre o uso das condições propostas e sua relação com outras condições da literatura, aborda os problemas de controle com restrição de estruturas e controle sob falha de atuadores e apresenta exemplos numéricos que ilustram como as condições propostas reduzem o conservadorismo em problemas de análise e de síntese.

- Capítulo 4: apresenta condições suficientes na forma de LMIs para resolver os quatro problemas de controle aplicados a sistemas chaveados lineares (caso contínuo): estabilização, controle $\mathcal{H}_\infty$, estabilização com alocação de pólos e controle $\mathcal{H}_\infty$ com alocação de pólos através de ganhos chaveados. Para o caso discreto, são apresentadas soluções na forma de LMIs para os quatro problemas de síntese, que são: controle $\mathcal{H}_\infty$ com ganhos robustos e com ganhos chaveados, estabilização com alocação de pólos e controle $\mathcal{H}_\infty$ com alocação de pólos através de ganhos chaveados. As condições fornecidas são baseadas em funções de Lyapunov. Da mesma forma que no Capítulo 3, comentários e exemplos numéricos, incluindo uma aplicação em circuitos elétricos chaveados, ilustram como as condições propostas contribuem para melhorar o desempenho dos sistemas em questão.

- Capítulo 5: descreve as conclusões e as contribuições do trabalho, apresentando duas tabelas que sumarizam os problemas tratados na tese, as soluções fornecidas e os comentários pertinentes. Também descreve as perspectivas de trabalhos futuros e as publicações com participação do autor que têm relação com o tema da tese.

1.5 Comentários de ordem geral

O tipo de estabilidade tratada na tese é a estabilidade assintótica, isto é, para qualquer condição inicial diferente de zero, o vetor de estados converge para a origem quando t (ou k no caso discreto) tende a infinito.

As condições de análise e síntese para sistemas lineares variantes no tempo são apresentadas para o caso de parâmetros pertencentes a um politopo. Todo sistema linear que depende de parâmetros variantes no tempo limitados pode ser representado por um politopo e, assim, as condições da tese também são válidas para esses sistemas.

No caso dos sistemas lineares variantes no tempo abordados na tese, para todas as condições de análise de estabilidade e de cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$, supõe-se que os parâmetros do sistema são incertos e variantes no tempo. No caso da síntese de ganhos de realimentação de estados dependentes de parâmetros, assume-se que o vetor de parâmetros é variante no tempo e que está disponível (medido ou estimado) em tempo real. No caso de sistemas chaveados lineares, a tese fornece condições de síntese de ganhos chaveados de realimentação de estados supondo que a função de chaveamento é arbitrária, mas está disponível (medida ou estimada) em tempo real.

Os resultados dos exemplos numéricos apresentados no decorrer do texto foram obtidos utilizando o *LMI Control Toolbox*, do Matlab [44].

Capítulo 2

Definições e resultados preliminares

Este capítulo apresenta os sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo pertencentes a um politopo que serão investigados no trabalho e formula de modo geral os problemas de análise de estabilidade, cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$, estabilizabilidade e controle $\mathcal{H}_\infty$ utilizando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, nos casos contínuo e discreto no tempo. Algumas condições da literatura baseadas em escolhas particulares da matriz de Lyapunov, como por exemplo matrizes fixas e matrizes dependentes de parâmetros na forma afim, com testes convexos para tratar os problemas em questão, são revistas. Os problemas específicos de análise de estabilidade, cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e de síntese de ganhos para leis de controle por realimentação de estados capazes de estabilizar e garantir um certo desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada tratados na tese são apresentados.

2.1 Sistemas lineares variantes no tempo: caso contínuo

Considere o sistema linear variante no tempo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B_1(\alpha(t))w(t) + B_2(\alpha(t))u(t) \tag{2.1}$$

$$z(t) = C(\alpha(t))x(t) + D_1(\alpha(t))w(t) + D_2(\alpha(t))u(t) \tag{2.2}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ é uma entrada exógena, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema. As matrizes $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $B_2(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_1(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{p\times r}$, $D_2(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ são variantes no tempo e pertencem ao politopo $\mathcal{D}_c$ dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_c = \Big\{&(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(t)) \ : \\ &(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)_j, \\ &\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1,\ \alpha_j(t) \geq 0,\ j = 1, \ldots, N\Big\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

sendo que qualquer realização do sistema é dada pela combinação convexa de $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)_j$, $j = 1, \ldots, N$, chamadas vértices de $\mathcal{D}_c$. O vetor de parâmetros $\alpha(t) = [\alpha_1(t) \ldots \alpha_N(t)]'$ está sujeito às restrições $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1,\ \alpha_j(t) \geq 0,\ j = 1, \ldots, N$ e cada elemento $\alpha_j(t)$ é suposto uniformemente contínuo e com derivada primeira $\dot{\alpha}_j(t)$ limitada (função Lipschitz).

2.1.1 Estabilidade

O problema da análise da estabilidade do sistema

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) \tag{2.4}$$

em que $A(\alpha(t)) \in \mathcal{D}_c$ com $(B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e com $\alpha(t)$ incerto pode ser abordado através da função de Lyapunov dependente de parâmetros

$$v(x(t)) = x(t)'P(\alpha(t))x(t) \tag{2.5}$$

com

$$\dot{v}(x(t)) = x(t)'\Big(A(\alpha(t))'P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t))\Big)x(t) \tag{2.6}$$

em que $\dot{P}(\alpha(t))$ denota a derivada temporal de $P(\alpha(t))$.

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema (2.4) é dada pela existência de uma matriz simétrica definida positiva $P(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A(\alpha(t))'P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t)) < 0 \tag{2.7}$$

Note no entanto que, para se utilizar a expressão (2.7), é preciso dispor de uma avaliação de $\dot{P}(\alpha(t))$ para todo $\alpha(t)$, o que nem sempre é possível.

Supondo que os parâmetros $\alpha(t)$ do sistema (2.4) estejam sujeitos a taxas de variação arbitrárias (relaxação da hipótese dos elementos de $\alpha(t)$ serem funções Lipschitz), uma condição suficiente para a estabilidade é dada pela estabilidade quadrática [9], reproduzida no lema a seguir.

Lema 2.1 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$A_j'P + PA_j < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.8}$$

então o sistema (2.4) é estável, com uma função de Lyapunov dada por

$$v(x(t)) = x(t)'Px(t) \tag{2.9}$$

Comentário 2.1 Observe que o resultado do Lema 2.1 vem da escolha particular $P(\alpha(t)) = P$ em (2.7), que implica $\dot{P}(\alpha(t)) = \dot{P} = \mathbf{0}$. Graças à convexidade de $A(\alpha(t))'P + PA(\alpha(t)) < 0$, com $A(\alpha(t)) \in \mathcal{D}_c$, é suficiente testar a desigualdade de Lyapunov apenas nos vértices do politopo de incertezas para verificar a estabilidade do sistema.

Comentário 2.2 A condição do Lema 2.1 é simples de ser testada (N LMIs), mas pode gerar resultados conservadores, pois uma mesma matriz P deve verificar a estabilidade de todo o domínio de incertezas.

A condição do Lema 2.1 não utiliza informações sobre limitantes nas taxas de variação dos parâmetros. Uma condição LMI que leva em consideração limitantes nas taxas de variação dos parâmetros do sistema foi apresentada em [43], baseada na chamada multiconvexidade da derivada de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, usada para o estudo da estabilidade de sistemas variantes no tempo dados por

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(\theta(t))x(t) \tag{2.10}$$

em que a matriz $\bar{A}(\theta(t))$ tem uma dependência afim com os parâmetros

$$\bar{A}(\theta(t)) = \bar{A}_0 + \theta_1(t)\bar{A}_1 + \ldots + \theta_L(t)\bar{A}_L \tag{2.11}$$

e assume-se que os seguintes limitantes inferiores e superiores são conhecidos

$$\theta_j(t) \in [\underline{\theta}_j, \overline{\theta}_j] \quad , \quad j = 1, \ldots, L \tag{2.12}$$

$$\dot{\theta}_j(t) \in [\underline{\nu}_j, \overline{\nu}_j] \quad , \quad j = 1, \ldots, L \tag{2.13}$$

Os resultados de [43] podem ser conservadores uma vez que um teste nos vértices do politopo de incertezas (geralmente uma condição apenas necessária) é usado para produzir avaliações conclusivas sobre a estabilidade do sistema. A análise da estabilidade de sistemas sujeitos a taxas de variações paramétricas limitadas é um dos problemas a serem investigados nesta tese, conforme descrito a seguir.

Problema 2.1 *Verificar a estabilidade do sistema incerto (2.4) sujeito a taxas de variações paramétricas limitadas dadas por*

$$| \dot{\alpha}_j(t) | \leq \rho_j \quad , \quad j = 1, \ldots, N-1 \tag{2.14}$$

através de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (2.5) com $P(\alpha(t))$ na forma afim

$$P(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)P_j \quad , \quad P_j = P_j' > 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1 \quad , \quad \alpha_j(t) \geq 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.15}$$

Note que $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1$ implica $\sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t) = 0$. Sem perda de generalidade, é possível escrever $\dot{\alpha}_N(t) = -\sum_{j=1}^{N-1} \dot{\alpha}_j(t)$, o que leva à restrição

$$| \dot{\alpha}_N(t) | \leq \sum_{j=1}^{N-1} | \dot{\alpha}_j(t) | \leq \sum_{j=1}^{N-1} \rho_j \tag{2.16}$$

A especificação dos limitantes das taxas de variações paramétricas (2.14), com $| \dot{\alpha}_N(t) |$ dado por (2.16) delimita uma região no espaço dos parâmetros $\dot{\alpha}_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$ que sempre contém a região definida pela restrição $\sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t) = 0$. Observe também que no caso de investigação dos domínios de estabilidade do sistema, a escolha de qual dos elementos de $\dot{\alpha}(t)$ será escrito como combinação linear dos demais pode influenciar nos resultados.

O Capítulo 3 traz uma condição do tipo LMI suficiente para a solução do Problema 2.1.

2.1.2 Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B_1(\alpha(t))w(t) \tag{2.17}$$

$$z(t) = C(\alpha(t))x(t) + D_1(\alpha(t))w(t) \tag{2.18}$$

em que $(A, B_1, C, D_1)(\alpha(t)) \in \mathcal{D}_c$ com $(B_2, D_2)(\alpha(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e com $\alpha(t)$ incerto.

Suponha que o sistema (2.17)-(2.18) é estável e que para qualquer entrada $w(t) \in \mathcal{L}_2$, a saída $z(t) \in \mathcal{L}_2$ é tal que

$$\|z(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2 \tag{2.19}$$

para $\gamma > 0$ finito. Qualquer γ que verifica (2.19) é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.17)-(2.18). O custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ ótimo do sistema é o valor mínimo de γ satisfazendo (2.19).

A estabilidade do sistema com um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é assegurada se [17]

$$\dot{v}(x(t)) + \mu^{-1} z(t)' z(t) - w(t)' w(t) < 0 \tag{2.20}$$

que, com $\dot{v}(x(t))$ dado por (2.6) e $z(t)$ dado por (2.18), pode ser reescrita como $\beta(t)' M(\alpha(t)) \beta(t) < 0$, com $\beta(t)' = [x(t)' \;\; w(t)']$ e

$$M(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} M_{11}(\alpha(t)) & P(\alpha(t))B_1(\alpha(t)) + \mu^{-1} C(\alpha(t))' D_1(\alpha(t)) \\ \star & \mu^{-1} D_1(\alpha(t))' D_1(\alpha(t)) - \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$M_{11}(\alpha(t)) \triangleq A(\alpha(t))' P(\alpha(t)) + P(\alpha(t)) A(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t)) + \mu^{-1} C(\alpha(t))' C(\alpha(t)) \tag{2.22}$$

Utilizando complemento de Schur, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema (2.17)-(2.18) com um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é dada pela existência de uma matriz simétrica definida positiva $P(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e de um escalar $\mu > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} A(\alpha(t))'P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t)) & P(\alpha(t))B_1(\alpha(t)) & C(\alpha(t))' \\ \star & -\mathbf{I} & D_1(\alpha(t))' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.23}$$

sendo o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por

$$\gamma = \sqrt{\mu} \tag{2.24}$$

No caso de sistemas lineares incertos invariantes no tempo ($\alpha(t) = \alpha$), é possível calcular o valor mínimo de γ utilizando a expressão (2.23) através de discretização do espaço paramétrico num passo arbitrariamente pequeno (discretização exaustiva). No caso variante no tempo, esse procedimento não pode ser diretamente aplicado pois é necessário avaliar $\dot{P}(\alpha(t))$ em (2.23).

Supondo que os parâmetros $\alpha(t)$ estejam sujeitos a taxas de variação arbitrárias, uma condição suficiente para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.17)-(2.18) é dada pela estabilidade quadrática, reproduzida no lema a seguir.

Lema 2.2 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_j'P + PA_j & PB_{1j} & C_j' \\ \star & -\mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.25}$$

tenha solução, então o sistema (2.17)-(2.18) é estável com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por

$$\gamma = \sqrt{\mu^*}, \ \textit{com} \ \mu^* = \min \mu \tag{2.26}$$

sendo P a matriz da função de Lyapunov (2.9) que assegura a estabilidade do sistema.

Comentários análogos aos comentários 2.1 e 2.2 são válidos aqui.

A condição do Lema 2.2 não leva em conta limitantes nas taxas de variação dos parâmetros, e o uso dessa informação sobre as taxas de variação constitui um problema de interesse desta tese, conforme descrito a seguir.

Problema 2.2 *Computar um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema incerto (2.17)-(2.18) sujeito a taxas de variações paramétricas limitadas dadas por (2.14) utilizando a matriz de Lyapunov dependente de parâmetros na forma afim (2.15).*

Uma condição do tipo LMI suficiente para resolver o Problema 2.2 é apresentada no Capítulo 3.

2.1.3 Estabilizabilidade

Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B_2(\alpha(t))u(t) \tag{2.27}$$

em que $(A, B_2)(\alpha(t)) \in \mathcal{D}_c$ com $(B_1, C, D_1, D_2)(\alpha(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e com $\alpha(t)$ disponível (medido ou estimado) em tempo real. Suponha uma lei de controle por realimentação de estados do tipo

$$u(t) = K(\alpha(t))x(t) \quad , \quad K(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{m\times n} \tag{2.28}$$

O sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x}(t) = A_{cl}(\alpha(t))x(t) \tag{2.29}$$

com

$$A_{cl}(\alpha(t)) \triangleq A(\alpha(t)) + B_2(\alpha(t))K(\alpha(t)) \tag{2.30}$$

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de (2.30) é dada pela existência de uma matriz simétrica definida positiva $P(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$A_{cl}(\alpha(t))'P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A_{cl}(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t)) < 0 \tag{2.31}$$

Suponha que o sistema (2.27) esteja sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias. Uma condição suficiente para a estabilização do mesmo através da lei de controle

$$u(t) = Kx(t) \tag{2.32}$$

com ganho fixo $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é dada pela chamada estabilizabilidade quadrática [13], reproduzida no lema a seguir.

Lema 2.3 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que*

$$A_jW + WA_j' + B_{2j}Z + Z'B_{2j}' < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.33}$$

então a estabilidade do sistema (2.27) é assegurada pela lei de controle por realimentação de estados (2.32) com

$$K = ZW^{-1} \tag{2.34}$$

sendo $P = W^{-1}$ a matriz da função de Lyapunov (2.9) do sistema.

Prova: Substituindo $P(\alpha(t)) = P$ em (2.31) e $K(\alpha(t)) = K$ na expressão de $A_{cl}(\alpha(t))$ dada por (2.30), é possível escrever

$$\big(A(\alpha(t)) + B_2(\alpha(t))K\big)'P + P\big(A(\alpha(t)) + B_2(\alpha(t))K\big) < 0 \tag{2.35}$$

Pré e pós-multiplicando (2.35) por P^{-1} e fazendo as substituições de variáveis $W = P^{-1}$ e $Z = KW$, tem-se

$$A(\alpha(t))W + WA(\alpha(t))' + B_2(\alpha(t))Z + Z'B_2(\alpha(t))' < 0 \tag{2.36}$$

Graças à convexidade de (2.36) com $(A, B_2)(\alpha(t)) \in \mathcal{D}_c$, a existência de solução para (2.33) é necessária e suficiente para garantir a factibilidade de (2.36). ■

Comentário 2.3 A condição do Lema 2.3 é baseada em um teste de factibilidade de N LMIs cuja solução permite determinar um ganho fixo (robusto) estabilizante para o sistema.

Comentário 2.4 A existência de um ganho fixo estabilizante simplifica o problema de controle, uma vez que não é necessário conhecer $\alpha(t)$ para determinar o sinal de controle $u(t)$.

Comentário 2.5 Os resultados da condição do Lema 2.3 podem ser conservadores, pois muitas vezes o sistema (2.27) não admite um ganho fixo estabilizante ou esse ganho não é calculável através de (2.33).

Estratégias de controle baseadas em ganhos dependentes de parâmetros podem gerar resultados menos conservadores, ao preço de se conhecer $\alpha(t)$ em tempo real. Os dois problemas descritos a seguir serão investigados no Capítulo 3.

Problema 2.3 *Calcular um ganho dependente de parâmetros $K(\alpha(t))$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.28) utilizando a função de Lyapunov quadrática (2.9), de modo que o sistema em malha fechada (2.29)-(2.30), com $\alpha(t)$ disponível em tempo real para realimentação, seja estável para taxas de variações paramétricas arbitrárias.*

Problema 2.4 *Calcular um ganho dependente de parâmetros $K(\alpha(t))$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.28) utilizando a matriz de Lyapunov dependente de parâmetros na forma afim (2.15), de modo que o sistema em malha fechada (2.29)-(2.30), com $\alpha(t)$ disponível em tempo real para realimentação, seja estável para taxas de variações paramétricas limitadas (2.14).*

2.1.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema (2.1)-(2.2) em que as matrizes pertencem ao politopo $\mathcal{D}_c$ com $\alpha(t)$ disponível em tempo real. Suponha que esse sistema esteja sujeito à lei de controle (2.28), podendo ser reescrito na forma

$$\dot{x}(t) = A_{cl}(\alpha(t))x(t) + B_1(\alpha(t))w(t) \tag{2.37}$$

$$z(t) = C_{cl}(\alpha(t))x(t) + D_1(\alpha(t))w(t) \tag{2.38}$$

com $A_{cl}(\alpha(t))$ dada por (2.30) e

$$C_{cl}(\alpha(t)) \triangleq C(\alpha(t)) + D_2(\alpha(t))K(\alpha(t)) \tag{2.39}$$

Assuma que existe um ganho $K(\alpha(t))$ que estabiliza o sistema em malha fechada (2.37)-(2.39) e que para qualquer entrada $w(t) \in \mathcal{L}_2$, a saída $z(t) \in \mathcal{L}_2$ é tal que (2.19) é satisfeita para $\gamma > 0$ finito (custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, que mede o nível de rejeição de perturbações do sistema em malha fechada), sendo de grande interesse determinar o controle que fornece o menor valor de γ.

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema (2.37)-(2.39) com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$ é dada pela existência de uma matriz simétrica definida positiva $P(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e de um escalar $\mu > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha(t))'P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A_{cl}(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t)) & P(\alpha(t))B_1(\alpha(t)) & C_{cl}(\alpha(t))' \\ \star & -\mathbf{I} & D_1(\alpha(t))' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.40}$$

Supondo taxas de variações paramétricas arbitrárias, uma condição suficiente para o cômputo de um ganho fixo que estabiliza o sistema com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ pré-especificado é dada pela estabilidade quadrática [67], [94], conforme reproduz o lema a seguir.

Lema 2.4 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_jW + WA_j' + B_{2j}Z + Z'B_{2j}' & B_{1j} & WC_j' + Z'D_{2j}' \\ \star & -\mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.41}$$

tenha solução, então a lei de controle por realimentação de estados (2.32) com ganhos fixos (2.34) assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.37)-(2.39) com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$, sendo $P = W^{-1}$ a matriz da função de Lyapunov (2.9) do sistema.

Prova: Segue passos similares aos das provas dos lemas 2.2 e 2.3. ∎

Comentários análogos aos comentários 2.1 a 2.5 são válidos aqui.

Comentário 2.6 O conservadorismo dos resultados do Lema 2.4 também pode ser notado em muitos casos em que (2.41) tem solução, mas os valores de γ calculados através da estabilidade quadrática não garantem um desempenho adequado para o sistema em malha fechada. Estratégias baseadas em ganhos dependentes de parâmetros podem fornecer melhores desempenhos que estratégias de ganhos fixos, ao preço de se conhecer os parâmetros do sistema em tempo real.

É possível enunciar a extensão dos problemas 2.3 e 2.4 para o caso de controle $\mathcal{H}_\infty$.

Problema 2.5 *Calcular um ganho dependente de parâmetros $K(\alpha(t))$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.28) utilizando a função de Lyapunov quadrática (2.9), de modo que o sistema em malha fechada (2.37)-(2.39), com $\alpha(t)$ disponível em tempo real para realimentação, seja estável para taxas de variações paramétricas arbitrárias, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ.*

Problema 2.6 *Calcular um ganho dependente de parâmetros $K(\alpha(t))$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.28) utilizando a matriz de Lyapunov dependente de parâmetros na forma afim (2.15), de modo que o sistema em malha fechada (2.37)-(2.39), com $\alpha(t)$ disponível em tempo real para realimentação, seja estável para taxas de variações paramétricas limitadas (2.14), com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ.*

Soluções convexas na forma de LMIs para os dois problemas acima serão apresentadas no Capítulo 3.

2.2 Sistemas lineares variantes no tempo: caso discreto

Seguindo considerações análogas às do caso contínuo, suponha o sistema linear variante no tempo

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) + B_1(\alpha(k))w(k) + B_2(\alpha(k))u(k) \tag{2.42}$$

$$z(k) = C(\alpha(k))x(k) + D_1(\alpha(k))w(k) + D_2(\alpha(k))u(k) \tag{2.43}$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(k) \in \mathbb{R}^r$ é uma entrada exógena, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema. As matrizes $A(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $B_2(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_1(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{p\times r}$, $D_2(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ são variantes no tempo e pertencem ao politopo $\mathcal{D}_d$ dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_d = \Big\{ &(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(k)) \ : \\ &(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(k)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k)(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)_j, \\ &\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) = 1,\ \alpha_j(k) \geq 0,\ j = 1, \ldots, N \Big\}\end{aligned} \tag{2.44}$$

sendo que qualquer realização do sistema é dada pela combinação convexa dos vértices de $\mathcal{D}_d$. O vetor de parâmetros $\alpha(k)$ é dado por $\alpha(k) = [\alpha_1(k) \ldots \alpha_N(k)]'$, com $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) = 1,\ \alpha_j(k) \geq 0,\ j = 1, \ldots, N$, com taxas de variações paramétricas $\Delta\alpha(k) = \alpha(k+1) - \alpha(k)$ supostas arbitrárias, sendo que $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k+1) = 1,\ \alpha_j(k+1) \geq 0,\ j = 1, \ldots, N$.

Os problemas de análise de estabilidade, cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e de controle por realimentação de estados com ganhos fixos e ganhos dependentes de parâmetros aplicados a (2.42)-(2.43) são descritos a seguir, juntamente com alguns testes na forma de LMIs da literatura utilizados em sua solução. Também é formulado outro grupo de problemas que será investigado na tese.

2.2.1 Estabilidade

A estabilidade do sistema

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) \tag{2.45}$$

em que $A(\alpha(k)) \in \mathcal{D}_d$ com $(B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(k)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e com $\alpha(k)$ incerto pode ser verificada através da função de Lyapunov dependente de parâmetros

$$v(x(k)) = x(k)'P(\alpha(k))x(k) \tag{2.46}$$

Note que como

$$v(x(k+1)) = x(k+1)'P(\alpha(k+1))x(k+1) \tag{2.47}$$

a função diferença $\Delta v(x(k)) \triangleq v(x(k+1)) - v(x(k))$ é dada por

$$\Delta v(x(k)) = x(k)'\Big(A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) - P(\alpha(k))\Big)x(k) \tag{2.48}$$

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema (2.45) é dada pela existência de matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P(\alpha(k+1)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) - P(\alpha(k)) < 0 \tag{2.49}$$

Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema (2.45) sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias é dada pela estabilidade quadrática [9], reproduzida no lema a seguir.

Lema 2.5 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$A_j'PA_j - P < 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \tag{2.50}$$

então o sistema (2.45) é estável, com uma função de Lyapunov dada por

$$v(x(k)) = x(k)'Px(k) \tag{2.51}$$

Comentários análogos aos comentários 2.1 e 2.2 também são válidos aqui. No caso discreto, a estabilidade quadrática é baseada na escolha particular $P(\alpha(k+1)) = P(\alpha(k)) = P$.

Uma condição menos conservadora do que a do Lema 2.5 foi apresentada em [24], utilizando a função de Lyapunov (2.46) com uma matriz $P(\alpha(k))$ na forma afim

$$P(\alpha(k)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) P_j \ , \ P_j = P_j' > 0 \ , \ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) = 1 \ , \ \alpha_j(k) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.52}$$

Assumindo taxas de variações paramétricas arbitrárias, é possível escrever

$$P(\alpha(k+1)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k+1) P_j = \sum_{i=1}^{N} \beta_i(k) P_i \ , \ P_i = P_i' > 0 \ , \ \sum_{i=1}^{N} \beta_i(k) = 1 \ , \ \beta_i(k) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.53}$$

e obter um teste convexo de estabilidade, reproduzido no lema a seguir.

Lema 2.6 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \ldots, N$ tais que

$$A_j' P_i A_j - P_j < 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{2.54}$$

o sistema (2.45) é estável, sendo $P(\alpha(k))$ dada por (2.52) a matriz da função de Lyapunov (2.46);

ii) Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \ldots, N$ tais que

$$\begin{bmatrix} P_j & A_j' P_i \\ \star & P_i \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{2.55}$$

o sistema (2.45) é estável, sendo $P(\alpha(k))$ dada por (2.52) a matriz da função de Lyapunov (2.46);

iii) Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \ldots, N$ tais que

$$\begin{bmatrix} S_j & S_j A_j' \\ \star & S_i \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{2.56}$$

o sistema (2.45) é estável, sendo $P(\alpha(k)) = S(\alpha(k))^{-1}$, com

$$S(\alpha(k)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) S_j \ , \ S_j = S_j' > 0 \ , \ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) = 1 \ , \ \alpha_j(k) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.57}$$

a matriz da função de Lyapunov (2.46);

iv) Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \ldots, N$ tais que

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j' - S_j & G_j' A_j' \\ \star & S_i \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{2.58}$$

o sistema (2.45) é estável, sendo $P(\alpha(k)) = S(\alpha(k))^{-1}$, com $S(\alpha(k))$ dada por (2.57), a matriz da função de Lyapunov (2.46) .

Prova: Equivalência entre i) e ii): é imediata, obtida por complemento de Schur. Equivalência entre ii) e iii): pré e pós-multiplique (2.55) por

$$T = \begin{bmatrix} P_j^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_i^{-1} \end{bmatrix}$$

e faça a transformação de variáveis $S_j = P_j^{-1}$, $S_i = P_i^{-1}$ para obter (2.56) e vice-versa. Equivalência entre iii) e iv): se (2.56) tem solução S_j, $j = 1, \ldots, N$, então (2.58) também será factível com $G_j = G_j' = S_j$. Se (2.58) é factível, então multiplicando (2.58) à esquerda por

$$T = \begin{bmatrix} -A_j & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e à direita por T', tem-se $S_i - A_j S_j A_j' > 0$, que é complemento de Schur de (2.56). ∎

Comentário 2.7 As condições do Lema 2.6 são necessárias e suficientes para a existência de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros na forma afim dada por (2.52) (veja [24] para detalhes).

Comentário 2.8 A condição da estabilidade quadrática (2.50) está contida no Lema 2.6, bastando fazer $P_i = P_j = P$, $j = 1, \ldots, N$ em (2.54). Portanto, o Lema 2.6 fornece avaliações menos conservadoras do que as da estabilidade quadrática para a estabilidade do sistema (2.45) ao preço de se resolver uma condição com maior complexidade numérica (N^2 LMIs).

Comentário 2.9 Embora as condições i) a iv) do Lema 2.6 sejam equivalentes para o caso da análise da estabilidade, as matrizes G_j da expressão (2.58) fornecem um grau de liberdade adicional para o projeto de controle com ganhos com restrições de estrutura (descentralização e realimentação de saída, por exemplo), como será visto na seqüência deste capítulo.

2.2.2 Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) + B_1(\alpha(k))w(k) \tag{2.59}$$

$$z(k) = C(\alpha(k))x(k) + D_1(\alpha(k))w(k) \tag{2.60}$$

em que $(A, B_1, C, D_1)(\alpha(k)) \in \mathcal{D}_d$ com $(B_2, D_2)(\alpha(k)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e com $\alpha(k)$ incerto.

Suponha que o sistema (2.59)-(2.60) é estável e que para qualquer entrada $w(k) \in \ell_2$, a saída $z(k) \in \ell_2$ é tal que

$$\|z(k)\|_2 < \gamma \|w(k)\|_2 \tag{2.61}$$

com $\gamma > 0$ finito. Qualquer γ que verifica (2.61) é um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.59)-(2.60) e o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ ótimo do sistema é o valor mínimo de γ satisfazendo (2.61).

A estabilidade do sistema com um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é assegurada se

$$\Delta v(x(k)) + z(k)'z(k) - \mu\, w(k)'w(k) < 0 \tag{2.62}$$

Com $\Delta v(x(k))$ dado por (2.48) e $z(k)$ dado por (2.60), é possível reescrever a expressão (2.62) como $\beta(k)'M(\alpha(k))\beta(k) < 0$, com $\beta(k)' = [x(k)' \;\; w(k)']$ e

$$M(\alpha(k)) = \begin{bmatrix} M_{11}(\alpha(k)) & A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))B_1(\alpha(k)) + C(\alpha(k))'D_1(\alpha(k)) \\ \star & B_1(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))B_1(\alpha(k)) + D_1(\alpha(k))'D_1(\alpha(k)) - \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

$$M_{11}(\alpha(k)) \triangleq A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) - P(\alpha(k)) + C(\alpha(k))'C(\alpha(k)) \tag{2.64}$$

Utilizando complemento de Schur em $M(\alpha(k))$, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema (2.59)-(2.60) com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$ é dada pela existência de matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P(\alpha(k+1)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e de um escalar $\mu > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1)) & \mathbf{0} & C(\alpha(k))' \\ \star & P(\alpha(k+1)) & P(\alpha(k+1))B_1(\alpha(k)) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & D_1(\alpha(k))' \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \tag{2.65}$$

No caso de sistemas lineares incertos invariantes no tempo ($\alpha(k+1) = \alpha(k) = \alpha$), é possível calcular o valor mínimo de γ utilizando a expressão (2.65) através de discretização exaustiva do espaço de parâmetros. No caso variante no tempo, esse procedimento não pode ser diretamente aplicado pois é necessário avaliar $P(\alpha(k+1))$ em (2.65).

Uma condição suficiente para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema (2.59)-(2.60) sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias é dada pela estabilidade quadrática ([9], [17]), reproduzida no lema a seguir.

Lema 2.7 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} P & A_j'P & \mathbf{0} & C_j' \\ \star & P & PB_{1j} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.66}$$

tenha solução, então o sistema (2.59)-(2.60) é estável com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, com $\mu^* = \min \mu$, sendo P a matriz da função de Lyapunov (2.51) do sistema.

Comentários análogos aos comentários 2.1 e 2.2 são válidos aqui.

Uma condição menos conservadora para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ baseada na função de Lyapunov com matriz na forma afim (2.52) é dada a seguir.

Lema 2.8 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $S_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = 1, \ldots, N$ tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a qualquer uma das três restrições equivalentes

$$\begin{bmatrix} P_j & A_j'P_i & \mathbf{0} & C_j' \\ \star & P_i & P_iB_{1j} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.67}$$

$$\begin{bmatrix} S_j & S_jA_j' & \mathbf{0} & S_jC_j' \\ \star & S_i & B_{1j} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.68}$$

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j' - S_j & \mathbf{0} & G_j'A_j' & G_j'C_j' \\ \star & \mathbf{I} & B_{1j}' & D_{1j}' \\ \star & \star & S_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{2.69}$$

tenha solução, então o sistema (2.59)-(2.60) é estável com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$.

Prova: Seguindo as idéias apresentadas na prova do Lema 2.6, multiplicando (2.67) à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} P_j^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_i^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e fazendo a troca de variáveis $P_i^{-1} = S_i$ e $P_j^{-1} = S_j$, obtém-se (2.68) e vice-versa. Observe que multiplicando (2.68) à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} S_j & \mathbf{0} & S_jA_j' & S_jC_j' \\ \star & \mathbf{I} & B_{1j}' & D_{1j}' \\ \star & \star & S_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.70}$$

Se (2.70) for factível tendo como solução S_j, $j = 1, \ldots, N$, então (2.69) é factível com $G_j = G_j' = S_j$. Se (2.69) for factível, então multiplicando (2.69) à esquerda por

$$T' = \begin{bmatrix} -A_j & -B_j & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -C_i & -D_i & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e à direita por T, tem-se

$$\begin{bmatrix} S_i - A_j S_j A_j' - B_j B_j' & -A_j S_j C_j' - B_j D_j' \\ \star & \mu \mathbf{I} - C_j S_j C_j' - D_j D_j' \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \quad , \quad j = 1, \ldots, N$$

que é complemento de Schur de (2.70). ∎

Comentários análogos aos comentários 2.7 a 2.9 são válidos aqui.

Comentário 2.10 As condições do Lema 2.8 são equivalentes à condição de cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ apresentada em [25].

2.2.3 Estabilizabilidade

Considere o sistema

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k) + B_2(\alpha(k))u(k) \tag{2.71}$$

em que $(A, B_2)(\alpha(k)) \in \mathcal{D}_d$ com $(B_1, C, D_1, D_2)(\alpha(k)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e com $\alpha(k)$ disponível em tempo real. Suponha uma lei de controle por realimentação de estados do tipo

$$u(k) = K(\alpha(k))x(k) \quad , \quad K(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{2.72}$$

O sistema em malha fechada é dado por

$$x(k+1) = A_{cl}(\alpha(k))x(k) \tag{2.73}$$

com

$$A_{cl}(\alpha(k) \triangleq A(\alpha(k)) + B_2(\alpha(k))K(\alpha(k)) \tag{2.74}$$

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de (2.74) é dada pela existência de matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P(\alpha(k+1)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$A_{cl}(\alpha(k))' P(\alpha(k+1)) A_{cl}(\alpha(k)) - P(\alpha(k)) < 0 \tag{2.75}$$

Por complemento de Schur, a expressão (2.75) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A_{cl}(\alpha(k))' P(\alpha(k+1)) \\ \star & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} > 0 \tag{2.76}$$

Multiplicando (2.76) à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k))^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha(k+1))^{-1} \end{bmatrix}$$

e fazendo a troca de variáveis $P(\alpha(k))^{-1} = S(\alpha(k))$, $P(\alpha(k+1))^{-1} = S(\alpha(k+1))$, tem-se

$$\begin{bmatrix} S(\alpha(k)) & S(\alpha(k)) A_{cl}(\alpha(k))' \\ \star & S(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} > 0 \tag{2.77}$$

que é equivalente à (2.75).

Uma condição suficiente para a estabilização do sistema (2.71) sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias através da lei de controle

$$u(k) = Kx(k) \tag{2.78}$$

com ganho fixo $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é dada pela chamada estabilizabilidade quadrática [13], reproduzida no lema a seguir.

Lema 2.9 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} S & SA_j' + Z'B_{2j}' \\ \star & S \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \tag{2.79}$$

então a estabilidade do sistema (2.71) é assegurada pela lei de controle por realimentação de estados (2.78) com $K = ZS^{-1}$, sendo $P = S^{-1}$ a matriz da função de Lyapunov (2.51) do sistema.

Prova: Faça $S(\alpha(k+1)) = S(\alpha(k)) = S$ e $A_{cl}(\alpha(k)) = A(\alpha(k)) + B_2(\alpha(k))K$ em (2.77). Considere a transformação de variáveis $Z = KS$. Graças à convexidade, é suficiente testar a LMI resultante apenas nos vértices $(A, B_2)_j$, $j = 1, \dots, N$, como em (2.79). ■

Comentários análogos aos comentários 2.3 a 2.5 são válidos aqui.

Resultados menos conservadores do que os provenientes do Lema 2.9 podem ser obtidos utilizando estratégias de controle com ganhos dependentes de parâmetros. Por exemplo, uma condição necessária e suficiente para calcular um ganho LPV que estabiliza o sistema (2.50) com $B_2(\alpha(k)) = B_2$ (matriz de controle invariante no tempo) utilizando uma função de Lyapunov dependente de parâmetros com $P(\alpha(k))$ na forma afim (2.52) foi dada em [24] e é reproduzida no lema a seguir.

Lema 2.10 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $F_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1, \dots, N$ tais que*

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j' - S_j & G_j'A_j' + F_j'B_2' \\ \star & S_i \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \ , \ j = 1, \dots, N \tag{2.80}$$

então a estabilidade do sistema (2.71) é assegurada pela lei de controle (2.72), com

$$K(\alpha(k)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) K_j \quad , \quad K_j = F_j G_j^{-1} \quad , \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) = 1 \quad , \quad \alpha_j(k) \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \tag{2.81}$$

Prova: Substitua A_j na expressão de verificação da estabilidade do sistema autônomo (2.58) por $A_j + B_2K_j$ e faça a troca de variáveis $F_j = K_jG_j$ para obter (2.80). Para maiores detalhes, veja [24]. ■

Comentário 2.11 A condição (2.80) contém a estabilizabilidade quadrática (2.79) para o caso particular $B_{2j} = B_2$, $j = 1, \ldots, N$, bastando fazer $G_j = G'_j = S_j = S_i = S$ em (2.80).

Comentário 2.12 As matrizes G_j da condição (2.80) fornecem um grau de liberdade adicional ao projeto, permitindo tratar com menos conservadorismo problemas de controle com ganhos com restrição de estrutura. Isso é feito impondo-se estruturas particulares às matrizes G_j e F_j, sem necessidade de particularizações das matrizes de Lyapunov S_j. Observe que apenas no caso de extensão da condição (2.56) para a síntese, as eventuais restrições de estrutura devem ser impostas diretamente nas matrizes S_j.

Comentário 2.13 Note que (2.80) permite calcular um ganho estabilizante do tipo LPV para o sistema (2.71) apenas no caso específico em que $B_2(\alpha(k)) = B_2$.

Comentário 2.14 É possível empregar a condição do Lema 2.10 para determinar um ganho robusto estabilizante K para o sistema (2.71) com $B_2(\alpha(k)) = B_2$. Basta utilizar matrizes fixas G e F na condição (2.80), mantendo o conjunto de matrizes S_j, $j = 1, \ldots, N$. Nesse caso ($G_j = G$, $F_j = F$), também é possível tratar o caso em que $B_2(\alpha(k))$ é variante no tempo, verificando a factibilidade de

$$\begin{bmatrix} G + G' - S_j & G'A'_j + F'B'_{2j} \\ \star & S_i \end{bmatrix} > 0 \ \ , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{2.82}$$

conforme apresentado em [78]. Observe que (2.82) vem diretamente de (2.58), utilizando matrizes fixas G e F, substituindo A_j por $A_j + B_{2j}K$ e levando em conta a troca de variáveis $F = KG$.

Um problema de análise da estabilizabilidade de (2.71) de interesse é descrito a seguir.

Problema 2.7 *Calcular um ganho dependente de parâmetros $K(\alpha(k))$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.72) utilizando uma função de Lyapunov dependente de parâmetros com $P(\alpha(k))$ na forma afim (2.52) de modo que o sistema em malha fechada (2.73)-(2.74), com matriz $B_2(\alpha(k))$ variante no tempo e com $\alpha(k)$ disponível em tempo real para realimentação, seja estável para taxas de variações paramétricas arbitrárias.*

Uma condição LMI para a solução do Problema 2.7 é dada no Capítulo 3.

2.2.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema (2.42)-(2.43) em que as matrizes pertencem ao politopo $\mathcal{D}_d$ com $\alpha(k)$ disponível em tempo real. Suponha que esse sistema está sujeito à lei de controle (2.72), podendo ser reescrito na forma

$$x(k+1) = A_{cl}(\alpha(k))x(k) + B_1(\alpha(k))w(k) \tag{2.83}$$

$$z(k) = C_{cl}(\alpha(k))x(k) + D_1(\alpha(k))w(k) \tag{2.84}$$

com $A_{cl}(\alpha(k))$ dada por (2.74) e

$$C_{cl}(\alpha(k)) \triangleq C(\alpha(k)) + D_2(\alpha(k))K(\alpha(k)) \tag{2.85}$$

Assuma que existe um ganho $K(\alpha(k))$ que estabiliza o sistema (2.83)-(2.85) e que para qualquer entrada $w(k) \in \ell_2$, a saída $z(k) \in \ell_2$ é tal que (2.61) é satisfeita com $\gamma > 0$ finito, (custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, que mede o nível de rejeição de perturbações do sistema em malha fechada), sendo de grande interesse determinar o controle que fornece o menor valor de γ.

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema em malha fechada (2.83)-(2.85) com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu}$ é dada pela existência de matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P(\alpha(k+1)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e de um escalar $\mu > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A_{cl}(\alpha(k))'P(\alpha(k+1)) & \mathbf{0} & C_{cl}(\alpha(k))' \\ \star & P(\alpha(k+1)) & P(\alpha(k+1))B_1(\alpha(k)) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & D_1(\alpha(k))' \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \tag{2.86}$$

A condição (2.86) vem de (2.65) substituindo $A(\alpha(k))$ por $A_{cl}(\alpha(k))$ e $C(\alpha(k))$ por $C_{cl}(\alpha(k))$. Multiplicando (2.86) à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k))^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha(k+1))^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e fazendo a troca de variáveis $P(\alpha(k))^{-1} = S(\alpha(k))$ e $P(\alpha(k+1))^{-1} = S(\alpha(k+1))$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} S(\alpha(k)) & S(\alpha(k))A_{cl}(\alpha(k))' & \mathbf{0} & S(\alpha(k))C_{cl}(\alpha(k))' \\ \star & S(\alpha(k+1)) & B_1(\alpha(k)) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & D_1(\alpha(k))' \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \tag{2.87}$$

Seguindo as idéias da prova do Lema 2.8, (2.87) equivale a

$$\begin{bmatrix} G(\alpha(k)) + G(\alpha(k))' - S(\alpha(k)) & \mathbf{0} & G(\alpha(k))'A_{cl}(\alpha(k))' & G(\alpha(k))'C_{cl}(\alpha(k))' \\ \star & \mathbf{I} & B_1(\alpha(k))' & D_1(\alpha(k))' \\ \star & \star & S(\alpha(k+1)) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \tag{2.88}$$

Uma condição suficiente para o cômputo de um ganho fixo que estabiliza o sistema sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias com um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é dada pela estabilidade quadrática [67], [94], conforme reproduz o lema a seguir.

Lema 2.11 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} S & SA'_j + Z'B'_{2j} & \mathbf{0} & SC'_j + Z'D_{2j} \\ \star & S & B_{1j} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & D'_{1j} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \tag{2.89}$$

tenha solução, então o sistema (2.83)-(2.85) é estabilizável pela lei de controle por realimentação de estados (2.78) com $K = ZS^{-1}$*, com um custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu^*}$*,* $\mu^* = \min \mu$*, sendo* $P = S^{-1}$ *a matriz da função de Lyapunov (2.51) do sistema.*

Prova: Similar à prova do Lema 2.9. ∎

Comentários análogos aos comentários 2.3 a 2.5 são válidos aqui.

Da mesma forma que no caso da estabilizabilidade da seção anterior, uma condição necessária e suficiente para calcular um ganho LPV que estabiliza o sistema (2.83)-(2.85) com $(B_2, D_2)(\alpha(k)) = (B_2, D_2)$, isto é, matrizes de controle invariantes no tempo, utilizando uma função de Lyapunov dependente de parâmetros com $P(\alpha(k))$ na forma afim (2.52) foi dada em [25] e é reproduzida no lema a seguir.

Lema 2.12 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas* $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *e matrizes* $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *e* $F_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$*,* $j = 1, \dots, N$ *tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} G_j + G'_j - S_j & \mathbf{0} & G'_j A'_j + F'_j B_2 & G'_j C'_j + F'_j D_2 \\ \star & \mathbf{I} & B'_{1j} & D'_{1j} \\ \star & \star & S_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \ , \ j = 1, \dots, N \tag{2.90}$$

tenha solução, então o sistema (2.83)-(2.85) é estabilizável pela lei de controle por realimentação de estados (2.72) com $K(\alpha(k))$ *dado por (2.81), com um custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$ *dado por* $\gamma = \sqrt{\mu^*}$*,* $\mu^* = \min \mu$*, sendo* $P(\alpha(k)) = S(\alpha(k))^{-1}$*,* $S(\alpha(k))$ *dada por (2.57), a matriz da função de Lyapunov do sistema.*

Prova: Substitua A_j e C_j na expressão de verificação da estabilidade do sistema autônomo (2.58) por $A_j + B_2 K_j$ e $C_j + D_2 K_j$, respectivamente, e faça a troca de variáveis $F_j = K_j G_j$ para obter (2.90). Para maiores detalhes, veja [24]. ∎

Comentários análogos aos comentários 2.11 a 2.14 para o caso da estabilizabilidade são válidos aqui e o Problema 2.7 pode ser estendido para o caso de controle $\mathcal{H}_\infty$, conforme descrito a seguir.

Problema 2.8 *Calcular um ganho dependente de parâmetros* $K(\alpha(k))$ *para a lei de controle por realimentação de estados (2.72) utilizando uma função de Lyapunov dependente de parâmetros com* $P(\alpha(k))$ *na forma afim (2.52) de modo que o sistema em malha fechada (2.83)-(2.85), com matrizes* $(B_2, D_2)(\alpha(k))$

variantes no tempo e com $\alpha(k)$ disponível em tempo real para realimentação, seja estável com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ para taxas de variações paramétricas arbitrárias.

Uma solução convexa na forma de LMI para o Problema 2.8 será apresentada no Capítulo 3.

2.3 Sistemas chaveados lineares: caso contínuo

Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A_{\xi(t)}x(t) + B_{1\xi(t)}w(t) + B_{2\xi(t)}u(t) \tag{2.91}$$

$$z(t) = C_{\xi(t)}x(t) + D_{1\xi(t)}w(t) + D_{2\xi(t)}u(t) \tag{2.92}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ é uma entrada exógena, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema, $A_{\xi(t)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_{1\xi(t)} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $B_{2\xi(t)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_{\xi(t)} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_{1\xi(t)} \in \mathbb{R}^{p\times r}$ e $D_{2\xi(t)} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ são as matrizes do sistema e $\xi(t)$ é a função de chaveamento definida como

$$\xi(t) : \mathbb{R}^+ \to \{1, \ldots, N\} \tag{2.93}$$

que seleciona arbitrariamente o subsistema linear $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)_j$, $j = 1, \ldots, N$, que está ativo em cada instante de tempo.

2.3.1 Estabilidade

Considere o sistema (2.91)-(2.92) com $(B_1, B_2, C, D_1, D_2)_j = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $j = 1, \ldots, N$, dado por

$$\dot{x}(t) = A_{\xi(t)}x(t) \tag{2.94}$$

com função de chaveamento $\xi(t)$ incerta e com variações arbitrárias, dada por (2.93).

A estabilidade quadrática (Lema 2.1) é uma condição suficiente para a estabilidade de (2.94), sendo que comentários análogos aos comentários 2.1 e 2.2 são válidos aqui.

Comentário 2.15 Note que para o sistema chaveado (2.94) supõe-se que a função $\xi(t)$ varia instantaneamente quando ocorrem chaveamentos de um subsistema para outro (sistema chaveado ideal), sendo portanto um sistema variante no tempo que não se enquadra nas hipóteses dos sistemas tratados na seção 2.1 deste capítulo.

Comentário 2.16 A estabilidade de cada subsistema A_j, $j = 1, \ldots, N$ é uma condição necessária para a estabilidade de (2.94), com $\xi(t)$ arbitrária [76]. Com respeito à estabilidade de sistemas lineares chaveados autônomos, [82] mostra que uma função de Lyapunov comum existe se todas as matrizes são assintoticamente estáveis e o produto de duas a duas é comutativo.

Comentário 2.17 A condição do Lema 2.1 avalia a estabilidade do sistema chaveado supondo que todas as transições de A_i para A_j, $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$ são permitidas. No caso em que nem todas as transições $i \to j$ são permitidas, mas que se conhece *a priori* o conjunto de transições realizáveis pelo sistema chaveado, os resultados da estabilidade quadrática podem ser conservadores, pois a condição não leva essa informação em consideração na análise.

Outras classes de funções de Lyapunov podem reduzir o conservadorismo da análise, tais como as funções quadráticas por partes [1], [63], [118] ou múltiplas [19] mas, em geral, a solução numérica requer um elevado esforço computacional e/ou que as regras de chaveamento sejam conhecidas *a priori*.

2.3.2 Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema (2.91)-(2.92) com $(B_2, D_2)_j = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $j = 1, \ldots, N$, dado por

$$\dot{x}(t) = A_{\xi(t)} x(t) + B_{1\xi(t)} w(t) \tag{2.95}$$

$$z(t) = C_{\xi(t)} x(t) + D_{1\xi(t)} w(t) \tag{2.96}$$

com função de chaveamento $\xi(t)$ incerta e com variações arbitrárias (2.93).

Suponha que o sistema (2.95)-(2.96) é estável e que para qualquer entrada $w(t) \in \mathcal{L}_2$, a saída $z(t) \in \mathcal{L}_2$ é tal que (2.19) é verificada com $\gamma > 0$ finito (custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema).

Uma condição suficiente para o cômputo de um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema chaveado (2.95)-(2.96) é dada pela estabilidade quadrática (Lema 2.2), sendo que comentários análogos aos comentários 2.1, 2.2 e 2.15 a 2.17 são válidos aqui.

2.3.3 Estabilizabilidade

Considere o sistema (2.91)-(2.92) com $(B_1, C, D_1, D_2)_j = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $j = 1, \ldots, N$, dado por

$$\dot{x}(t) = A_{\xi(t)} x(t) + B_{2\xi(t)} u(t) \tag{2.97}$$

com função de chaveamento $\xi(t)$ arbitrária, não conhecida *a priori* mas disponível (medida, estimada) em tempo real. Suponha uma lei de controle por realimentação de estados com ganhos chaveados dada por

$$u(t) = K_{\xi(t)} x(t) \quad , \quad K_{\xi(t)} \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{2.98}$$

O sistema em malha fechada é dado por

$$x(t) = A_{cl\xi(t)} x(t) \tag{2.99}$$

com

$$A_{cl\xi(t)} \triangleq A_{\xi(t)} + B_{2\xi(t)} K_{\xi(t)} \tag{2.100}$$

Uma condição suficiente para a estabilização do sistema (2.97) através da lei de controle $u(t) = Kx(t)$ com ganho fixo é dada pela estabilizabilidade quadrática, do Lema 2.3, sendo válidos aqui comentários análogos aos comentários 2.3 a 2.5.

Resultados menos conservadores podem ser obtidos utilizando a lei de controle (2.98) com ganhos chaveados $K_{\xi(t)}$ cujo cômputo é um dos problemas de interesse da tese.

Problema 2.9 *Calcular um ganho chaveado $K_{\xi(t)}$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.98) utilizando a função de Lyapunov quadrática (2.9) de modo que o sistema em malha fechada (2.99)-(2.100) seja estável para funções de chaveamento $\xi(t)$ arbitrárias, não conhecidas* a priori*, mas disponíveis em tempo real.*

Uma solução LMI para o Problema 2.9 será dada no Capítulo 4.

2.3.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema (2.91)-(2.92) com função de chaveamento $\xi(t)$ arbitrária, não conhecida *a priori* mas disponível em tempo real. Suponha que esse sistema esteja sujeito à lei de controle (2.98), podendo ser reescrito na forma

$$\dot{x}(t) = A_{cl\xi(t)}x(t) + B_{1\xi(t)}w(t) \tag{2.101}$$

$$z(t) = C_{cl\xi(t)}x(t) + D_{1\xi(t)}w(t) \tag{2.102}$$

com $A_{cl\xi(t)}$ dada por (2.100) e

$$C_{cl\xi(t)} \triangleq C_{\xi(t)} + D_{2\xi(t)}K_{\xi(t)} \tag{2.103}$$

Assuma que existe um ganho $K_{\xi(t)}$ que estabiliza o sistema em malha fechada (2.101)-(2.103) e que para qualquer entrada $w(t) \in \mathcal{L}_2$, a saída $z(t) \in \mathcal{L}_2$ é tal que (2.19) é satisfeita com $\gamma > 0$ finito (custo garantido $\mathcal{H}_\infty$).

Uma condição suficiente para o cômputo de um ganho robusto K para a lei de controle $u(t) = Kx(t)$ é dada pelo Lema 2.4, sendo válidos aqui comentários análogos aos comentários 2.1 a 2.6 e 2.15 a 2.17.

É possível enunciar a extensão do Problema 2.9 para tratar o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$, conforme descrito a seguir.

Problema 2.10 *Calcular um ganho chaveado $K_{\xi(t)}$ para a lei de controle por realimentação de estados utilizando a função de Lyapunov quadrática (2.9) de modo que o sistema em malha fechada (2.101)-(2.103) seja estável, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ, para funções de chaveamento $\xi(t)$ arbitrárias, não conhecidas* a priori*, mas disponíveis em tempo real.*

Uma solução LMI para o Problema 2.10 também será apresentada no Capítulo 4.

2.3.5 Alocação de pólos

A alocação dos pólos de um sistema linear em malha fechada em regiões pré-determinadas do plano complexo permite que parâmetros da resposta transitória como sobre-sinal, tempo de acomodação e freqüência de oscilação sejam especificados. Várias regiões do plano complexo têm sido exploradas para a alocação [55], [71] e a região de interesse aqui é um círculo com centro $-(r+d)$ e raio r, $r > 0$, $d \geq 0$, escolhidos *a priori*, contido no semiplano esquerdo do plano complexo, mostrado na Figura 2.1.

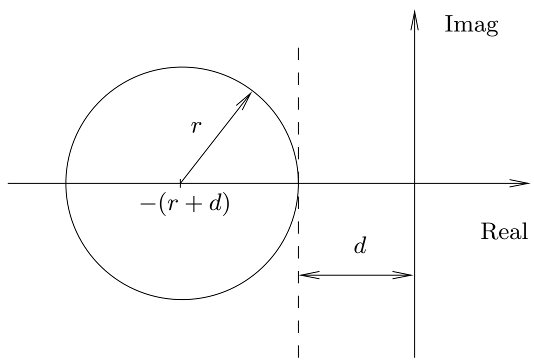

Figura 2.1: Região circular $\mathcal{C}_c$ para alocação de pólos de sistemas chaveados lineares contínuos no tempo.

Considerando sistemas chaveados lineares, a idéia é alocar os pólos de cada subsistema linear na região $\mathcal{C}_c$ para garantir que a resposta transitória do sistema em malha fechada esteja dentro de limites desejados.

Uma condição necessária e suficiente da literatura [55] que assegura que todos os autovalores de uma matriz A estejam dentro do círculo da Figura 2.1 é dada pela existência de uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$(A + d\mathbf{I})W + W(A + d\mathbf{I})' + \frac{1}{r}(A + d\mathbf{I})W(A + d\mathbf{I})' < 0 \tag{2.104}$$

Suponha que a matriz A não seja perfeitamente conhecida, mas que pertença ao politopo $\mathcal{A}$ dado por

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) \ : \ A(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j A_j \ , \ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1 \ , \ \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, N \right\} \tag{2.105}$$

em que α é suposto incerto e invariante no tempo.

Uma condição suficiente para que todos os autovalores de $A(\alpha)$ estejam contidos no círculo da Figura 2.1 é dada pela existência de uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que [71]

$$(A_j + d\mathbf{I})W + W(A_j + d\mathbf{I})' + \frac{1}{r}(A_j + d\mathbf{I})W(A_j + d\mathbf{I})' < 0 \ \ , \quad j = 1, \ldots, N \tag{2.106}$$

A verificação de (2.106) nos vértices do politopo $\mathcal{A}$ é suficiente para que os autovalores de qualquer matriz $A(\alpha)$ pertencente ao politopo estejam contidos no círculo $\mathcal{C}_c$.

A condição (2.106) também é válida para verificar se os autovalores de matrizes A_j, $j = 1, \dots, N$ que representam os subsistemas lineares do sistema chaveado (2.94) estão contidos no círculo $\mathcal{C}_c$.

Uma condição suficiente para a existência de uma lei de controle por realimentação de estados com ganhos fixos que garanta que os autovalores de todos os subsistemas lineares do sistema chaveado (2.94) estejam contidos no círculo $\mathcal{C}_c$ da Figura 2.1 é dada pelo lema a seguir.

Lema 2.13 *Dados $d \geq 0$ e $r > 0$, se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} A_jW + WA_j' + B_{2j}Z + Z'B_{2j}' + 2dW & A_jW + B_{2j}Z + dW \\ \star & -rW \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \tag{2.107}$$

então a lei de controle $u(t) = Kx(t)$, com $K = ZW^{-1}$, assegura a cada subsistema linear em malha fechada $A_j + B_{2j}K$, $j = 1, \dots, N$ a alocação de pólos na região circular $\mathcal{C}_c$ especificada na Figura 2.1.

Prova: Utilizando complemento de Schur, a equação (2.107), com $Z = KW$, pode ser reescrita como

$$(A_j + B_{2j}K + d\mathbf{I})W + W(A_j + B_{2j}K + d\mathbf{I})' + \frac{1}{r}(A_j + B_{2j}K + d\mathbf{I})W(A_j + B_{2j}K + d_j\mathbf{I})' < 0$$
$$j = 1, \dots, N \tag{2.108}$$

que é a expressão (2.106) substituindo A_j por $A_j + B_{2j}K$, o que assegura a alocação de pólos desejada para cada subsistema linear em malha fechada do sistema chaveado. ∎

Dois problemas de interesse com relação à alocação de pólos para sistemas chaveados lineares são descritos a seguir.

Problema 2.11 *Calcular um ganho chaveado $K_{\xi(t)}$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.98) utilizando a função de Lyapunov quadrática (2.9) de modo que o sistema chaveado em malha fechada (2.99)-(2.100) seja estável para funções de chaveamento $\xi(t)$ arbitrárias, não conhecidas* a priori, *mas disponíveis em tempo real e que os pólos de cada subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \dots, N$ estejam contidos no círculo $\mathcal{C}_c$ da Figura 2.1.*

Problema 2.12 *Calcular um ganho chaveado $K_{\xi(t)}$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.98) utilizando a função de Lyapunov quadrática (2.9) de modo que o sistema chaveado em malha fechada (2.101)-(2.103) seja estável, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ para funções de chaveamento $\xi(t)$ arbitrárias, não conhecidas* a priori, *mas disponíveis em tempo real e que os pólos de cada subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \dots, N$ estejam contidos no círculo $\mathcal{C}_c$ da Figura 2.1.*

Condições na forma de LMIs para solucionar os problemas 2.11 e 2.12 serão dadas no Capítulo 4.

2.4 Sistemas chaveados lineares: caso discreto

Seguindo considerações análogas às do caso contínuo, suponha o sistema

$$x(k+1) = A_{\xi(k)}x(k) + B_{1\xi(k)}w(k) + B_{2\xi(k)}u(k) \tag{2.109}$$

$$z(k) = C_{\xi(k)}x(k) + D_{1\xi(k)}w(k) + D_{2\xi(k)}u(k) \tag{2.110}$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(k) \in \mathbb{R}^r$ é uma entrada exógena, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema, $A_{\xi(k)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_{1\xi(k)} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $B_{2\xi(k)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_{\xi(k)} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_{1\xi(k)} \in \mathbb{R}^{p\times r}$ e $D_{2\xi(k)} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ são as matrizes do sistema e $\xi(k)$ é a função de chaveamento definida como

$$\xi(k) : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, N\} \tag{2.111}$$

que seleciona arbitrariamente o subsistema linear $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)_j$, $j = 1, \ldots, N$, que está ativo em cada instante de tempo.

Note que, no caso discreto, o sistema chaveado (2.109)-(2.110) é um caso particular do sistema variante no tempo (2.42)-(2.43) para o qual as matrizes somente assumem os valores dos vértices do politopo $\mathcal{D}_d$ e podem mudar de um vértice para outro instantaneamente.

2.4.1 Estabilidade

Considere o sistema (2.109)-(2.110) com $(B_1, B_2, C, D_1, D_2)_j = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $j = 1, \ldots, N$, dado por

$$x(k+1) = A_{\xi(k)}x(k) \tag{2.112}$$

com função de chaveamento $\xi(k)$ incerta e com variações arbitrárias, dada por (2.111).

A estabilidade quadrática (Lema 2.5) é uma condição suficiente para a estabilidade de (2.112), sendo válidos aqui comentários análogos aos comentários 2.1 e 2.2.

Uma condição necessária e suficiente (veja [26] para detalhes) para a existência de uma função de Lyapunov com matriz chaveada da forma

$$v(x(k)) = x(k)'P_{\xi(k)}x(k) \tag{2.113}$$

que garante a estabilidade do sistema (2.112) para funções de chaveamento arbitrárias é dada pelo Lema 2.6, sendo que comentários análogos aos comentários 2.7 a 2.9 têm validade aqui.

Comentário 2.18 A condição do Lema 2.6 avalia a estabilidade do sistema chaveado (2.112) supondo que todas as transições de A_i para A_j, $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$, sejam possíveis. Observe que o Lema 2.6 também permite avaliar a estabilidade de (2.112) para o caso em que nem todas as transições são realizáveis. Para isso, basta testar qualquer das condições (2.54)-(2.58) somente para os pares (i, j) possíveis, com $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$, além do teste em $i = j = 1, \ldots, N$ (condição necessária). A condição baseada na estabilidade quadrática não incorpora essa informação na análise (veja Comentário 2.17).

2.4.2 Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema (2.109)-(2.110) com $(B_2, D_2)_j = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $j = 1, \ldots, N$, dado por

$$x(k+1) = A_{\xi(k)}x(k) + B_{1\xi(k)}w(k) \tag{2.114}$$

$$z(k) = C_{\xi(k)}x(k) + D_{1\xi(k)}w(k) \tag{2.115}$$

com função de chaveamento $\xi(k)$ incerta e com variações arbitrárias (2.111). Suponha que o sistema (2.114)-(2.115) é estável e que para qualquer entrada $w(k) \in \ell_2$, a saída $z(k) \in \ell_2$ é tal que (2.61) é verificada com $\gamma > 0$ finito (custo garantido $\mathcal{H}_\infty$).

Uma condição suficiente para o cômputo de um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema chaveado (2.114)-(2.115) é dada pela estabilidade quadrática (Lema 2.7), sendo que comentários análogos aos comentários 2.1, 2.2, 2.16 e 2.17 têm validade aqui.

Resultados menos conservadores podem ser obtidos com as condições do Lema 2.8, sendo que um comentário análogo ao Comentário 2.18 é válido aqui.

2.4.3 Estabilizabilidade

Considere o sistema (2.109)-(2.110) com $(B_1, C, D_1, D_2)_j = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $j = 1, \ldots, N$, dado por

$$x(k+1) = A_{\xi(k)}x(k) + B_{2\xi(k)}u(k) \tag{2.116}$$

com função de chaveamento $\xi(k)$ arbitrária, não conhecida *a priori* mas disponível em tempo real.

Suponha uma lei de controle por realimentação de estados com ganhos chaveados dada por

$$u(k) = K_{\xi(k)}x(k) \quad , \quad K_{\xi(k)} \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{2.117}$$

O sistema em malha fechada é dado por

$$x(k+1) = A_{cl\xi(k)}x(k) \tag{2.118}$$

com

$$A_{cl\xi(k)} \triangleq A_{\xi(k)} + B_{2\xi(k)}K_{\xi(k)} \tag{2.119}$$

Uma condição suficiente para a estabilização do sistema (2.116) através da lei de controle $u(k) = Kx(k)$ com ganho fixo é dada pela estabilizabilidade quadrática, do Lema 2.9. Comentários análogos aos comentários 2.3 a 2.5 são válidos aqui.

Resultados menos conservadores podem ser obtidos utilizando a lei de controle (2.117) com ganhos chaveados $K_{\xi(k)}$, que podem ser computados através da condição do lema a seguir (reproduzido de [26]).

Lema 2.14 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas* $S_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e matrizes* $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $F_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1, \ldots, N$ *tais que*

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j' - S_j & G_j'A_j' + F_j'B_{2j}' \\ \star & S_i \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{2.120}$$

então a estabilidade do sistema (2.116) é assegurada pela lei de controle (2.117), sendo que a função de chaveamento $\xi(k)$ *seleciona o ganho* $K_j = F_j G_j^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$ *que está ativo em cada instante de tempo.*

Prova: Substitua A_j na expressão de verificação da estabilidade do sistema autônomo (2.58) por $A_j + B_{2j}K_j$ e faça a troca de variáveis $F_j = K_j G_j$ para obter (2.120). ■

Comentário 2.19 Observe que o resultado do Lema 2.10, apresentado para sistemas variantes no tempo, também pode ser aplicado para o sistema chaveado (2.116), mas somente para o caso particular em que a matriz $B_{2\xi(k)}$ é igual a uma matriz fixa, não chaveada, B_2.

Comentário 2.20 No contexto de sistemas chaveados, como a função de chaveamento só assume os valores $1, \ldots, N$, é necessário avaliar o produto $B_{2\xi(k)}K_{\xi(k)}G_{\xi(k)}$ apenas em $B_{2j}K_jG_j$, $j = 1, \ldots, N$, que, transformado em $B_{2j}F_j$, pela mudança de variáveis $F_j = K_jG_j$, permite solução convexa para o caso de matrizes B_{2j} chaveadas.

Comentários análogos aos comentários 2.12 e 2.14 são válidos aqui.

2.4.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema (2.109)-(2.110) com função de chaveamento $\xi(k)$ arbitrária, não conhecida *a priori* mas disponível em tempo real. Suponha que esse sistema esteja sujeito à lei de controle (2.117), podendo ser reescrito na forma

$$x(k+1) = A_{cl\xi(k)}x(k) + B_{1\xi(k)}w(k) \tag{2.121}$$

$$z(k) = C_{cl\xi(k)}x(k) + D_{1\xi(k)}w(k) \tag{2.122}$$

com $A_{cl\xi(k)}$ dada por (2.119) e

$$C_{cl\xi(k)} \triangleq C_{\xi(k)} + D_{2\xi(k)}K_{\xi(k)} \tag{2.123}$$

Assuma que existe um ganho $K_{\xi(k)}$ que estabiliza o sistema em malha fechada (2.121)-(2.123) e que para qualquer entrada $w(k) \in \ell_2$, a saída $z(k) \in \ell_2$ é tal que (2.61) é verificada com $\gamma > 0$ finito (custo garantido $\mathcal{H}_\infty$).

Uma condição suficiente para o cômputo de um ganho robusto K para a lei de controle $u(k) = Kx(k)$ que estabiliza o sistema em malha fechada (2.121)-(2.123) com um custo garantido γ é dada pelo Lema 2.11, sendo que comentários análogos aos comentários 2.1 a 2.6, 2.16 e 2.17 têm validade aqui.

Resultados menos conservadores para tratar o caso em que as matrizes B_2 e D_2 são fixas (não chaveadas) podem ser obtidos utilizando diretamente a condição do Lema 2.12.

Dois problemas de interesse para a tese são descritos a seguir.

Problema 2.13 *Calcular um ganho robusto para a lei de controle $u(k) = Kx(k)$ utilizando uma função de Lyapunov com matriz chaveada (2.113) de modo que o sistema em malha fechada (2.121)-(2.123) seja estável com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ para funções de chaveamento $\xi(k)$ arbitrárias e incertas.*

Problema 2.14 *Calcular um ganho chaveado $K_{\xi(k)}$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.117) utilizando uma função de Lyapunov com matriz chaveada (2.113) de modo que o sistema em malha fechada (2.121)-(2.123), com matrizes $B_{2\xi(k)}$, $D_{2\xi(k)}$, seja estável com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ para funções de chaveamento $\xi(k)$ arbitrárias, não conhecidas a priori, mas disponíveis em tempo real.*

Condições na forma de LMIs para a solução desses problemas são obtidas através de extensões de resultados da literatura, conforme será descrito no Capítulo 4.

2.4.5 Alocação de pólos

A região de interesse para alocação dos pólos dos subsistemas lineares de um sistema chaveado linear discreto no tempo é um círculo $\mathcal{C}_d$ com centro c e raio r escolhidos *a priori*, contido no círculo de raio unitário centrado na origem do plano complexo, como mostrado na Figura 2.2.

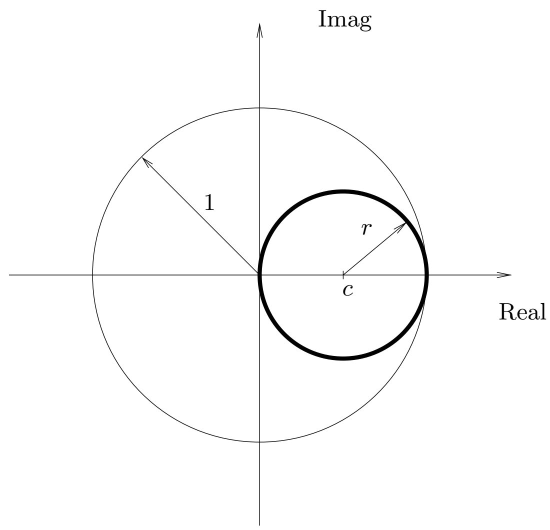

Figura 2.2: Região circular $\mathcal{C}_d$, com centro c e raio r, para alocação de pólos de sistemas chaveados lineares discretos no tempo.

A condição do Lema 2.13 é igualmente aplicável à alocação de pólos dos subsistemas lineares do sistema chaveado (2.116). Nesse caso, os parâmetros d e r do círculo devem ser adequadamente escolhidos para que a região esteja contida dentro do círculo de raio unitário. O parâmetro d é a distância do ponto mais à direita do círculo até o eixo imaginário, convencionada como positiva quando o ponto se encontra no semiplano esquerdo.

É possível enunciar os problemas 2.11 e 2.12 para o caso discreto, conforme descrito a seguir.

Problema 2.15 *Calcular um ganho chaveado $K_{\xi(k)}$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.117) utilizando uma função de Lyapunov com matriz chaveada de modo que o sistema chaveado em malha fechada (2.118)-(2.119) seja estável para funções de chaveamento $\xi(k)$ arbitrárias, não conhecidas* a priori, *mas disponíveis em tempo real e que os pólos de cada subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ estejam contidos no círculo $\mathcal{C}_d$ da Figura 2.2.*

Problema 2.16 *Calcular um ganho chaveado $K_{\xi(k)}$ para a lei de controle por realimentação de estados (2.117) utilizando uma função de Lyapunov com matriz chaveada de modo que o sistema chaveado em malha fechada (2.121)-(2.123) seja estável, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ, para funções de chaveamento $\xi(k)$ arbitrárias, não conhecidas* a priori, *mas disponíveis em tempo real e que os pólos de cada subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ estejam contidos no círculo $\mathcal{C}_d$ da Figura 2.2.*

Condições na forma de LMIs para solução dos problemas 2.15 e 2.16 serão dadas no Capítulo 4.

Capítulo 3

Sistemas lineares variantes no tempo

Este capítulo apresenta condições na forma de LMIs para resolver os problemas de análise de estabilidade, cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$, estabilização e controle $\mathcal{H}_\infty$ com ganhos linearmente e não-linearmente dependentes de parâmetros aplicados a sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo pertencentes a um politopo no caso contínuo (problemas 2.1 a 2.6). No caso discreto, são apresentadas soluções do tipo LMI para os problemas de estabilização e de controle $\mathcal{H}_\infty$ através de ganhos não-linearmente dependentes de parâmetros para a situação em que todas as matrizes do sistema são supostas variantes no tempo (problemas 2.7 e 2.8). Outros pontos abordados no capítulo são o controle com restrições de estrutura (controle descentralizado e realimentação de saída) e o controle sob falhas parciais ou totais de atuadores. Comentários sobre a aplicação das condições propostas, complexidade numérica e relações com outras condições da literatura são feitos e a eficiência das condições fornecidas é ilustrada por meio de exemplos numéricos.

3.1 Caso contínuo no tempo

3.1.1 Estabilidade

O teorema a seguir fornece uma solução para o Problema 2.1.

Teorema 3.1 *Dado um conjunto de parâmetros escalares reais $\rho_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que (o símbolo $\pm$ indica que as LMIs devem ser implementadas para todas as combinações de sinais $+$ e $-$)*

$$A_j' P_j + P_j A_j + \sum_{i=1}^{N-1} \pm\rho_i (P_i - P_N) < 0 \qquad j = 1, \ldots, N \tag{3.1}$$

$$A_j' P_k + P_k A_j + A_k' P_j + P_j A_k + 2\sum_{i=1}^{N-1} \pm\rho_i (P_i - P_N) < 0 \qquad j = 1, \ldots, N-1 \;\;,\;\; k = j+1, \ldots, N \tag{3.2}$$

o sistema (2.4) com parâmetros incertos variantes no tempo com taxas de variação limitadas (2.14) é estável com uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros na forma afim dada por (2.15).

Prova: Seja a expressão de $\dot{v}(x(t))$ dada por (2.6). Com $A(\alpha(t))$ dada por (2.3) no caso em que $(B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $P(\alpha(t))$ dada por (2.15), tem-se que $\dot{v}(x(t)) \triangleq x(t)'Q(\alpha(t))x(t)$, com

$$Q(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)^2(A_j'P_j + P_jA_j) + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t)(A_j'P_k + P_kA_j + A_k'P_j + P_jA_k) + \sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)P_j \quad (3.3)$$

Note que

$$\Big(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\Big)^2 = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2(t) + 2\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t) = 1 \quad (3.4)$$

o que permite reescrever (3.3) como

$$Q(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)^2(A_j'P_j + P_jA_j + \sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)P_j) + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t)(A_j'P_k + P_kA_j + A_k'P_j + P_jA_k + 2\sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)P_j) \quad (3.5)$$

Observe que $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1$ e $\sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t) = 0$, e portanto $\dot{\alpha}_N(t) = -\sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)$ e

$$\sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)P_j = \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)(P_i - P_N) \quad (3.6)$$

o que leva a

$$Q(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)^2(A_j'P_j + P_jA_j + \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)(P_i - P_N)) + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t)(A_j'P_k + P_kA_j + A_k'P_j + P_jA_k + 2\sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)(P_i - P_N)) \quad (3.7)$$

Considerando os limitantes das taxas de variação dos parâmetros dados por (2.14), tem-se que as condições do Teorema 3.1 são suficientes para garantir que $Q(\alpha(t)) < 0$ para todo $\alpha_j(t) \geq 0$, $j = 1, \ldots, N$, tal que $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1$. ∎

Comentário 3.1 Observe que as condições do Teorema 3.1 fornecem uma maneira sistemática de verificar a estabilidade do sistema (2.4) quando os limitantes nas taxas de variação dos parâmetros (2.14) são conhecidos *a priori*. O problema convexo a ser resolvido é descrito por um conjunto finito de LMIs, sem a necessidade de discretizar o espaço paramétrico.

Comentário 3.2 O número de LMIs das condições do Teorema 3.1 é dado por $N + N2^{N-1} + N(N-1)2^{N-2}$ (incluindo $P_j > 0$, $j = 1 \dots N$). Apesar do número de LMIs a serem resolvidas crescer rapidamente com N (número de vértices do sistema), dado um valor de N, o problema pode ser resolvido por algoritmos de tempo polinomial [44].

Comentário 3.3 Se (3.1)-(3.2) são factíveis para valores arbitrariamente grandes de ρ_i, $i = 1, \dots, N-1$, as condições do Teorema 3.1 têm como solução $P_1 \simeq P_2 \simeq \dots P_N$ e o sistema tende à estabilidade quadrática. Note que as LMIs (3.1)-(3.2) precisam ser factíveis para $+\rho_i(P_i - P_N)$ e $-\rho_i(P_i - P_N)$ e, no caso de ρ_i arbitrariamente grandes, a única maneira de satisfazer as LMIs é com a solução $P_1 \simeq \cdots \simeq P_N$, que reduz a influência dos termos $\pm\rho_i(P_i - P_N)$. Por outro lado, se o Lema 2.1 (estabilidade quadrática) tem solução P, o Teorema 3.1 será factível com $P_1 = P_2 = \dots P_N = P$, para qualquer valor de ρ_i, $i = 1, \dots, N-1$.

Comentário 3.4 No caso de sistemas invariantes no tempo (i.e. $\rho_i = 0$, $i = 1, \dots, N-1$), as condições (3.1)-(3.2) tornam-se

$$A_j'P_j + P_jA_j < 0 \ , \quad j = 1, \dots, N \tag{3.8}$$

$$A_j'P_k + P_kA_j + A_k'P_j + P_jA_k < 0 \ \ , \ \ j = 1, \dots, N-1, \ \ k = j+1, \dots, N \tag{3.9}$$

As condições propostas em [97] são

$$A_j'P_j + P_jA_j < -\mathbf{I} \ , \quad j = 1, \dots, N \tag{3.10}$$

$$A_j'P_k + P_kA_j + A_k'P_j + P_jA_k < \frac{2}{N-1}\mathbf{I} \ \ , \ \ j = 1, \dots, N-1, \ \ k = j+1, \dots, N \tag{3.11}$$

Se existir uma solução factível para (3.10)-(3.11), então (usando o argumento da homogeneidade) sempre existe uma solução factível para

$$A_j'P_j + P_jA_j < -\epsilon\mathbf{I} \ , \quad j = 1, \dots, N \tag{3.12}$$

$$A_j'P_k + P_kA_j + A_k'P_j + P_jA_k < \epsilon\frac{2}{N-1}\mathbf{I} \ \ , \ \ j = 1, \dots, N-1, \ \ k = j+1, \dots, N \tag{3.13}$$

para qualquer escolha de $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \to 0$, as condições (3.12)-(3.13) tendem a (3.8)-(3.9). Como pode ser verificado através dos programas especializados em LMIs, testar a factibilidade de (3.8)-(3.9), (3.10)-(3.11) ou (3.12)-(3.13) para $\epsilon > 0$ arbitrário é equivalente.

Comentário 3.5 Ainda no contexto de sistemas invariantes no tempo, a condição de [5], baseada na multiconvexidade [43], requer, para assegurar a estabilidade robusta, que existam variáveis escalares λ_j e matrizes $X_j = X_j'$, $j = 1, \dots, N$ tais que

$$A_i'X_j + X_jA_i + A_j'X_i + X_iA_j \le A_i'X_i + X_iA_i + A_j'X_j + X_jA_j + (\lambda_i + \lambda_j)\mathbf{I} < 0 \tag{3.14}$$

o que é sempre mais conservador do que exigir a existência de P_j, $j = 1, \ldots, N$ tais que (3.9) seja satisfeita.

Comentário 3.6 Quando os limitantes das taxas de variação dos parâmetros ρ_i, $i = 1, \ldots, N-1$ não são conhecidos *a priori*, é possível utilizar buscas lineares no espaço dos parâmetros ρ_i, $i = 1, \ldots, N-1$ para estimar os limites de estabilidade do sistema. O modo mais simples de se efetuar a busca é impor que todos os limitantes são iguais, isto é, $\rho_i = \rho$, $i = 1, \ldots, N-1$, e usar procedimentos de busca unidimensional (método da bisseção, por exemplo) para determinar o maior valor de ρ para o qual as condições do Teorema 3.1 são verificadas. Quando mais limitantes ρ_i, $i = 2, \ldots, N-1$ precisam ser encontrados, pode-se utilizar uma busca heurística. O ponto de partida para a investigação das máximas taxas de variações paramétricas é testar o caso $\rho_i = 0$, $i = 2, \ldots, N-1$ (isto é, caso de incertezas invariantes no tempo). Se existir solução para esse caso, então procure pelo valor máximo de cada um dos ρ_i's usando bisseção, fixando todos os outros ρ_i's em zero. Esse procedimento define um hiper-retângulo no espaço dos limitantes das taxas de variação dos parâmetros que contém o domínio de estabilidade robusta. Então, fixe alguns dos ρ_i's em valores constantes, impondo $\rho_j = \rho$, $j \neq i$ e procure novamente pelo máximo ρ. Repetindo esses passos, uma estimativa do domínio de estabilidade é obtida. É importante mencionar que, para qualquer conjunto fixo de ρ_i's, a existência de solução para as LMIs do Teorema 3.1 garante a estabilidade robusta do sistema incerto com taxas de variações paramétricas limitadas por ρ_i's.

Comentário 3.7 É interessante notar que sistemas lineares variantes no tempo como (2.10), em que a matriz dinâmica (2.11) possui dependência do tipo afim em parâmetros $\theta(t)$ supostos limitados, podem ser reescritos na forma politópica (2.4), com $N = 2^L$ vértices (L é o número de parâmetros $\theta(t)$) dados por

$$\begin{array}{c} A_1 = \bar{A}_0 + \underline{\theta}_1 \bar{A}_1 + \ldots + \underline{\theta}_L \bar{A}_L \\ A_2 = \bar{A}_0 + \underline{\theta}_1 \bar{A}_1 + \ldots + \overline{\theta}_L \bar{A}_L \\ \vdots \\ A_N = \bar{A}_0 + \overline{\theta}_1 \bar{A}_1 + \ldots + \overline{\theta}_L \bar{A}_L \end{array} \tag{3.15}$$

e sempre existe uma relação linear entre $\dot{\theta}(t)$ e $\dot{\alpha}(t)$. Observe que $\dot{\bar{A}}(\theta(t)) = \dot{A}(\alpha(t))$, com $\bar{A}(\theta(t))$ dada por (2.11) e $A(\alpha(t))$ dada por (2.3), com $(B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Por exemplo, no caso de $L = 1$ parâmetro

$$\dot{\theta}_1(t) = (\underline{\theta}_1 - \overline{\theta}_1)\dot{\alpha}_1(t) \tag{3.16}$$

ou, em termos dos limitantes,

$$\mid \dot{\theta}_1(t) \mid \leq \mid \underline{\theta}_1 - \overline{\theta}_1 \mid \rho_1 \tag{3.17}$$

No caso de $L = 2$ parâmetros,

$$\begin{array}{c} \dot{\theta}_1(t) = (\underline{\theta}_1 - \overline{\theta}_1)(\dot{\alpha}_1(t) + \dot{\alpha}_2(t)) \\ \dot{\theta}_2(t) = (\underline{\theta}_2 - \overline{\theta}_2)(\dot{\alpha}_1(t) + \dot{\alpha}_3(t)) \end{array} \tag{3.18}$$

ou, em termos dos limitantes,

$$\begin{array}{l} |\ \dot{\theta}_1(t)\ |\leq|\ \underline{\theta}_1 - \overline{\theta}_1\ |\ (\rho_1+\rho_2) \\ |\ \dot{\theta}_2(t)\ |\leq|\ \underline{\theta}_2 - \overline{\theta}_2\ |\ (\rho_1+\rho_3) \end{array} \tag{3.19}$$

e assim sucessivamente.

Os exemplos numéricos a seguir ilustram como as condições do Teorema 3.1 produzem avaliações menos conservadoras para os domínios de estabilidade quando comparadas à estabilidade quadrática e também como podem produzir melhores resultados do que a condição de [43].

Exemplo 3.1 Considere o sistema (2.4) com vértices gerados aleatoriamente, dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.0085 & 0.0432 \\ -0.6317 & -0.2576 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} -1.4105 & 0.7307 \\ 0.4786 & -0.3965 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} -0.5733 & -0.4534 \\ -0.9459 & -1.0802 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Esse sistema não é quadraticamente estável, isto é, o Lema 2.1 não fornece solução. Por outro lado, o Teorema 3.1 permite determinar o domínio de estabilidade do sistema em função das taxas de variação dos parâmetros ρ_1, ρ_2 (lembrando que $|\ \dot{\alpha}_1(t)\ |\leq \rho_1$, $|\ \dot{\alpha}_2(t)\ |\leq \rho_2$, $|\ \dot{\alpha}_3(t)\ |\leq \rho_1+\rho_2$), conforme mostra a Figura 3.1.

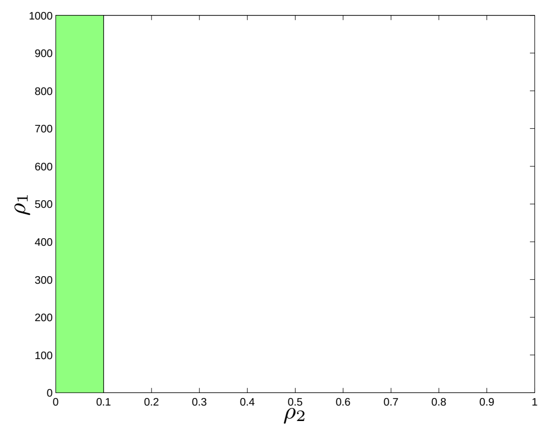

Figura 3.1: Domínio de estabilidade do sistema (2.4) com vértices (3.20) em função dos limitantes das taxas de variação dos parâmetros.

As condições do Teorema 3.1 são factíveis na região sombreada da Figura 3.1, indicando que o sistema é estável para taxas de variação arbitrariamente grandes em $\alpha_1(t)$ (medidas por elevados valores de ρ_1) desde que as variações em $\alpha_2(t)$ permaneçam pequenas (valores de $\rho_2 \leq 0.1$) e assim fornecendo informações sobre o domínio de estabilidade do sistema que não podem ser obtidas pela estabilidade quadrática do Lema 2.1.

Exemplo 3.2 Seja o sistema na forma afim, com um parâmetro variante no tempo $\theta(t)$, descrito por

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \theta(t)A_\theta)x(t) \tag{3.21}$$

em que a matriz

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.2231 & 1.6236 & 1.2540 \\ -1.3362 & -0.7630 & -1.5937 \\ 0.7143 & 0.8580 & -1.5122 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

representa o sistema nominal e a matriz associada às perturbações é dada por

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Considere que o parâmetro pode assumir valores no intervalo $0 \leq \theta(t) \leq \bar{\theta}$. O Lema 2.1 (estabilidade quadrática) é factível para um limitante $\bar{\theta}_{L21} = 0.26$, indicando que o sistema é estável no intervalo $0 \leq \theta(t) \leq 0.26$ para taxas de variações arbitrárias em $\theta(t)$. Com o Teorema 3.1, são obtidos os valores $\bar{\theta}_{T31} = 0.26$ para $\mid \dot{\theta}(t) \mid$ arbitrariamente grande (igualando o resultado do Lema 2.1) e $\bar{\theta}_{T31} = 0.62$ para $\mid \dot{\theta}(t) \mid = 0$ (caso invariante no tempo), permitindo melhorar a estimativa do domínio de estabilidade do sistema (ou seja, detectar o sistema como estável para valores maiores do limitante superior $\bar{\theta}$) pela inclusão dos limitantes da taxa de variação do parâmetro $\theta(t)$ na análise.

Exemplo 3.3 O terceiro exemplo diz respeito a um sistema estudado na literatura em [118]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+p(t)) & -1 \end{bmatrix} x(t), \ 0 \leq p(t) \leq \bar{p} \tag{3.24}$$

em que $p(t)$ é um parâmetro incerto linear variante no tempo com um limitante superior $\bar{p}$.

Esse exemplo foi estudado no contexto de taxas de variação $\dot{p}(t)$ arbitrárias, em que a condição da estabilidade quadrática (Lema 2.1) alcança $\bar{p} = 3.82$ como um valor máximo para $p(t)$, enquanto $\bar{p} = 5.8$ foi obtido em [118] e $\bar{p} = 6.735$ em [1], ambos utilizando funções de Lyapunov quadráticas por partes. O valor do limitante do parâmetro para uma função de Lyapunov poliedral [15] é $\bar{p} = 6.0$ e para funções de Lyapunov homogêneas [21] é $\bar{p} = 6.79$. O limite superior de $p(t)$ pode ser aumentado consideravelmente se taxas de variações limitadas $\dot{p}(t)$, dadas por $\mid \dot{p}(t) \mid \leq \tau$, forem levadas em consideração.

Note que o sistema (3.24) admite a forma politópica dada por $A(\alpha_1(t)) = \alpha_1(t)A_1 + (1 - \alpha_1(t))A_2$ com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \ p(t) = 0 \ , \ \alpha_1(t) = 1 \tag{3.25}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+\bar{p}) & -1 \end{bmatrix}, \ p(t) = \bar{p} \ , \ \alpha_1(t) = 0 \tag{3.26}$$

O parâmetro $p(t)$ do sistema original e o parâmetro $\alpha_1(t)$ do sistema na forma politópica são relacionados por $p(t) = (1 - \alpha_1(t))\ \bar{p}$. Portanto, $\dot{p}(t) = -\bar{p}\ \dot{\alpha}_1(t)$ e $\mid \dot{p}(t) \mid = \bar{p} \mid \dot{\alpha}_1(t) \mid$. Como $\mid \dot{\alpha}_1(t) \mid \leq \rho_1$, tem-se

$$\mid \dot{p}(t) \mid \leq \bar{p}\ \rho_1 \triangleq \tau \tag{3.27}$$

A Figura 3.2 mostra uma comparação entre os limites do domínio de estabilidade do sistema (3.24) obtidos através da condição do Teorema 3.1 (linha cheia) e da condição baseada na multiconvexidade [43] (linha tracejada). Para cada valor de $\bar{p}$, as condições do Teorema 3.1 são usadas para estimar o valor máximo de ρ_1 tal que $\mid \dot{p}(t) \mid \leq \bar{p}\ \rho_1 = \tau$. O limitante τ também foi computado através das condições de [43] para os mesmos valores de $\bar{p}$. Note que o valor $\bar{p} = 3.82$ obtido através da estabilidade quadrática (linha pontilhada vertical) foi detectado pelas condições do Teorema 3.1, bem como pela multiconvexidade [43]. Pela Figura 3.2, observa-se que o Teorema 3.1 permanece factível para valores maiores de τ quando $\bar{p}$ é mantido fixo, bem como para valores maiores de $\bar{p}$, quando τ é mantido fixo. Portanto, o domínio de estabilidade estimado com as condições do Teorema 3.1 (área abaixo da linha cheia) é maior do que o estimado pela multiconvexidade [43] (área abaixo da linha tracejada).

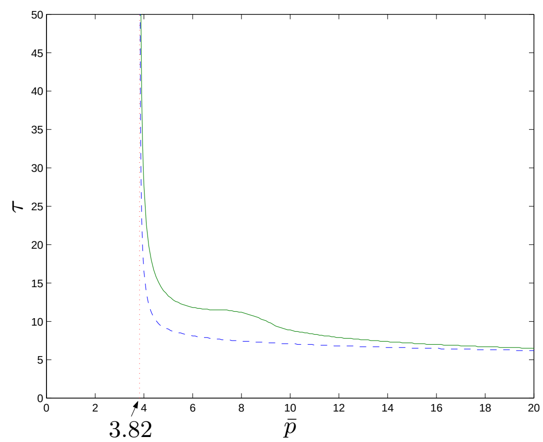

Figura 3.2: Domínios de estabilidade do sistema (3.24) computados pelo Teorema 3.1 (linha contínua) e pela multiconvexidade [43] (linha tracejada) em função do limitante superior $\bar{p}$ do parâmetro incerto $p(t)$ e do limitante superior τ de $\dot{p}(t)$.

Exemplo 3.4 Considere o sistema na forma afim (exemplo 3.5 de [44])

$$\dot{x}(t) = \big(\bar{A}_0 + \theta_1(t)\bar{A}_1 + \theta_2(t)\bar{A}_2\big)x(t) \tag{3.28}$$

em que $\underline{\theta}_1 \leq \theta_1(t) \leq \overline{\theta}_1$ e $\underline{\theta}_2 \leq \theta_2(t) \leq \overline{\theta}_2$ representam, por exemplo, a rigidez e o amortecimento de um sistema físico. O sistema (3.28) pode ser descrito na forma politópica com quatro vértices obtidos de todas as combinações possíves de valores máximos e mínimos de $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$. A relação linear entre os limitantes das taxas de variação dos parâmetros do sistema originalmente na forma afim com os limitantes dos parâmetros na representação politópica é dada por (3.19). Para $5 \leq \theta_1(t) \leq 10$, $0.01 \leq \theta_2(t) \leq 0.1$ e

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

a condição da estabilidade quadrática do Lema 2.1 não é factível. A condição de multiconvexidade [43] assegura que o sistema é estável para $\mid \dot{\theta}_1(t) \mid \leq 0.100$ e $\mid \dot{\theta}_2(t) \mid$ arbitrariamente grande, enquanto as condições do Teorema 3.1 verificam a estabilidade do sistema para $|\dot{\theta}_1(t)| \leq 0.105$ e $|\dot{\theta}_2(t)|$ arbitrariamente grande. Os resultados do Teorema 3.1 foram obtidos com $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0.0210$ e ρ_3 arbitrariamente grande (por exemplo, $\rho_3 = 10^6$) permitindo um aumento de 5% na estimativa de $|\dot{\theta}_1(t)|$.

3.1.2 Custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

A abordagem utilizada para a análise da estabilidade pode ser estendida para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$, fornecendo uma solução para o Problema 2.2, conforme descreve o teorema a seguir.

Teorema 3.2 *Dado um conjunto de parâmetros escalares reais $\rho_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \ldots, N$ tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'_j P_j + P_j A_j + \sum_{i=1}^{N-1} \pm\rho_i (P_i - P_N) & P_j B_{1j} & C'_{1j} \\ \star & -\mathbf{I} & D'_{1j} \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$j = 1, \ldots, N \tag{3.30}$$

$$\begin{bmatrix} A'_j P_k + P_k A_j + A'_k P_j + P_j A_k + 2\sum_{i=1}^{N-1} \pm\rho_i (P_i - P_N) & P_k B_{1j} + P_j B_{1k} & C'_j + C'_k \\ \star & -2\mathbf{I} & D'_{1j} + D'_{1k} \\ \star & \star & -2\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$j = 1, \ldots, N-1 \quad , \quad k = j+1, \ldots, N \tag{3.31}$$

tenha uma solução, então o sistema (2.17)-(2.18) com taxas de variações paramétricas limitadas (2.14) é estável com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$, com uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros na forma afim dada por (2.15).

Prova: Utilizando idéias análogas às apresentadas na prova do Teorema 3.1, com $(A, B_1, C, D_1)(\alpha(t))$ dada por (2.3), $(B_2, D_2)(\alpha(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $P(\alpha(t))$ dada por (2.15), o lado esquerdo da expressão (2.23) pode ser reescrito como

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)^2 M_j + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t) M_{jk} \tag{3.32}$$

com

$$M_j = \begin{bmatrix} A'_j P_j + P_j A_j + \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)(P_i - P_N) & P_j B_{1j} & C'_{1j} \\ \star & -\mathbf{I} & D'_{1j} \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$M_{jk} = \begin{bmatrix} A_j'P_k + P_kA_j + A_k'P_j + P_jA_k + 2\sum_{i=1}^{N-1}\dot{\alpha}_i(t)(P_i - P_N) & P_kB_{1j} + P_jB_{1k} & C_j' + C_k' \\ \star & -2\mathbf{I} & D_{1j}' + D_{1k}' \\ \star & \star & -2\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Considerando os limitantes (2.14) tem-se que as condições do Teorema 3.2 são suficientes para garantir que as matrizes M_j, M_{jk} dadas em (3.33) e (3.34) sejam definidas negativas, garantindo que (3.32) é definida negativa para $\alpha_j(t) \geq 0$, $j = 1, \ldots, N$, $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1$, o que assegura a estabilidade do sistema com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$. ■

Comentários análogos aos comentários 3.1 a 3.7 são válidos aqui.

Comentário 3.8 A condição baseada na multiconvexidade [43] não fornece estimativas confiáveis de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ pois as variáveis extras usadas para permitir uma solução numérica do problema de estabilidade afetam o cômputo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

Exemplos de aplicação do Teorema 3.2 são mostrados a seguir.

Exemplo 3.5 Considere o sistema (2.17)-(2.18) com $N = 3$ vértices gerados aleatoriamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.42 & 0.78 & -0.30 \\ 0.63 & -0.22 & -0.66 \\ -0.13 & 0.37 & -1.38 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -1.31 & -0.01 & -0.08 \\ -0.15 & -0.06 & -0.09 \\ 0.71 & -0.07 & -0.86 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.57 & -0.90 & 0.96 \\ -0.98 & -0.99 & 0.10 \\ -0.40 & 0.30 & -1.58 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D_{11} = D_{12} = D_{13} = 0 \quad (3.36)$$

Esse sistema não é quadraticamente estável e portanto não é possível computar um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ baseado na condição do Lema 2.2. Por outro lado, o Teorema 3.2 fornece estimativas de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema sujeito aos limitantes $| \dot{\alpha}_1(t) | \leq \rho_1$, $| \dot{\alpha}_2(t) | \leq \rho_2$ nas taxas de variação dos parâmetros (lembrando que $| \dot{\alpha}_3(t) | \leq \rho_1 + \rho_2$). Para $\rho_1 = \rho_2 = 0$ (caso invariante no tempo), o Teorema 3.2 fornece $\gamma = 6.4285$. O mesmo valor de γ é obtido considerando os parâmetros $\rho_1 = 0$, $0 \leq \rho_2 \leq 10^4$ ou $\rho_2 = 0$, $0 \leq \rho_1 \leq 10^4$. É interessante notar que a estabilidade do sistema e os valores de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ não são afetados quando um dos parâmetros permanece invariante no tempo. Entretanto, quando se considera o caso $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, isto é, todos os parâmetros do sistema variantes no tempo, os valores dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ calculados pelo Teorema 3.2 são fortemente afetados pelos limitantes ρ_1, ρ_2, como mostra a Figura 3.3.

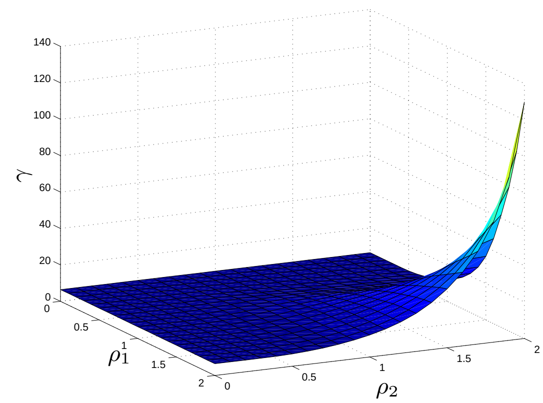

Figura 3.3: Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.17)-(2.18) com vértices (3.35)-(3.36) em função dos limitantes das taxas de variação dos parâmetros ρ_1, ρ_2.

Exemplo 3.6 Seja o modelo de um sistema massa-mola

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} w(t) \tag{3.37}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 0\; w(t) \tag{3.38}$$

em que as variáveis de estado são a posição $x_1(t)$ e a velocidade $x_2(t)$ da massa. Os parâmetros são definidos como

$$a(t) = \frac{K_s(t)}{m}\ ,\ b(t) = \frac{K_v(t)}{m}\ ,\ c = \frac{1}{m} \tag{3.39}$$

sendo $K_s(t)$ o coeficiente de elasticidade da mola e $K_v(t)$ o coeficiente de atrito da superfície na qual a massa m (suposta perfeitamente conhecida e invariante no tempo) desliza.

Primeiro, considere o caso em que $c = 1$ com parâmetros variantes no tempo tais que

$$1 \leq a(t) \leq a_M\ ,\ 1 \leq b(t) \leq 10 \tag{3.40}$$

O sistema admite uma representação politópica com $N = 4$ vértices dados por todas as combinações de valores máximos e mínimos de $a(t)$ e $b(t)$. As relações entre os limitantes das taxas de variação dos parâmetros do sistema original e da representação politópica são dadas por $\mid \dot{a}(t) \mid \leq \mid 1 - a_M \mid (\rho_1 + \rho_2)$ e $\mid \dot{b}(t) \mid \leq 9(\rho_1 + \rho_3)$. A Figura 3.4 mostra os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema calculados pela condição da estabilidade quadrática do Lema 2.2 e através das condições do Teorema 3.2 com $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, para $a_M = 2$, $a_M = 3$ e $a_M = 4$. As linhas horizontais pontilhadas representam os valores de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos através da estabilidade quadrática para $a_M = 2$ ($\gamma = 2.1213$) e para $a_M = 3$ ($\gamma = 3.3551$). Não há solução factível pela condição do Lema 2.2 (estabilidade quadrática) para $a_M \geq 4$. Note que, para $0 \leq \rho \leq 3$, os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ dados pelo Teorema 3.2 são sempre menores do que os valores obtidos com a estabilidade quadrática. Para valores de a_M tais que o sistema é quadraticamente

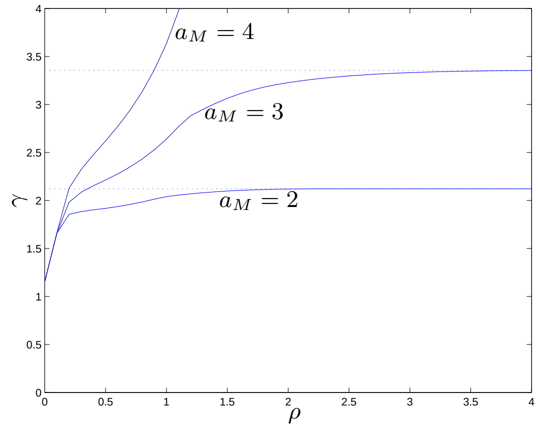

Figura 3.4: Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (3.37)-(3.38) em função dos limitantes das taxas de variações dos parâmetros $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$.

estável, os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ obtidos pelo Teorema 3.2 tendem aos valores obtidos pela estabilidade quadrática quando ρ cresce. Mesmo no caso em que a estabilidade quadrática do Lema 2.2 não é verificada, como por exemplo para $a_M = 4$, o Teorema 3.2 fornece estimativas de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$.

Considere agora a situação em que os dois parâmetros incertos variantes no tempo $a(t)$ e $b(t)$ assumem valores nos intervalos $1 \leq a(t) \leq 4$, $1 \leq b(t) \leq 10$. Nesse caso, o sistema (3.37)-(3.38) admite uma representação politópica com vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -10 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

e $(B_1, C, D_1)_j$, $j = 1, \ldots, 4$, dados pelas matrizes correspondentes no sistema original (3.37)-(3.38). A relação linear entre os limitantes das taxas de variação dos parâmetros do sistema original (forma afim) e os limitantes das taxas de variação dos parâmetros da representação politópica é dada por

$$|\dot{a}(t)| \leq 3(\rho_1 + \rho_2) \ , \ |\dot{b}(t)| \leq 9(\rho_1 + \rho_3) \tag{3.42}$$

As condições do Teorema 3.2 podem computar custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para esse sistema como uma função de ρ_1, ρ_2 e ρ_3, denotados por $\gamma(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$. Por exemplo, $\gamma(0, 0, 0) = 1.1547$ (caso invariante no tempo) e $\gamma(10, 10, 10) = 76.5834$, correspondendo a $|\dot{a}(t)| \leq 60$ e $|\dot{b}(t)| \leq 180$. No caso de $\rho_1 = \rho_3 = 0$ e ρ_2 arbitrariamente grande (isto é, $\dot{b}(t) = 0$), bem como quando $\rho_1 = \rho_2 = 0$ e ρ_3 é arbitrariamente grande (isto é, $\dot{a}(t) = 0$), as condições do Teorema 3.2 permitem determinar custos garantidos $\gamma(0, 10^4, 0) = \gamma(0, 0, 10^4) = 1.1547$, indicando que a estabilidade e o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema original (3.37)-(3.38) não são afetados quando um dos parâmetros (tanto $a(t)$ quanto $b(t)$) for invariante no tempo.

3.1.3 Estabilizabilidade

O teorema a seguir fornece uma condição descrita em termos de LMIs para o cálculo de um ganho estabilizante do tipo LPV para resolver o Problema 2.3.

Teorema 3.3 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1,\ldots,N$, tais que*

$$Q_j \triangleq A_jW + WA_j' + B_{2j}Z_j + Z_j'B_{2j}' < 0,\ j = 1,\ldots,N \tag{3.43}$$

$$Q_{jk} \triangleq (A_j + A_k)W + W(A_j + A_k)' + B_{2j}Z_k + Z_k'B_{2j}' + B_{2k}Z_j + Z_j'B_{2k}' < 0,$$
$$j = 1,\ldots,N-1\ ,\ k = j+1,\ldots,N \tag{3.44}$$

então a lei de controle $u(t) = K(\alpha(t))x(t)$ com ganhos LPV dados por

$$K(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)K_j\ ,\ \sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t) = 1\ ,\ \alpha_j(t) \geq 0\ ,\ j = 1,\ldots,N \tag{3.45}$$

$$K_j = Z_jW^{-1}\ ,\ j = 1,\ldots,N \tag{3.46}$$

assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.29)-(2.30) sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias, com uma função de Lyapunov quadrática (2.9), sendo $P = W^{-1}$.

Prova: Considere o lado esquerdo da expressão (2.31). Substituindo a expressão $A_{cl}(\alpha(t))$ por $A(\alpha(t)) + B_2(\alpha(t))K(\alpha(t))$, fazendo $P(\alpha(t)) = P$ (o que implica $\dot{P}(\alpha(t)) = \mathbf{0}$) e pré e pós-multiplicando a expressão resultante por $P^{-1} = W$ tem-se

$$\Big(A(\alpha(t)) + B_2(\alpha(t))K(\alpha(t)\Big)W + W\Big(A(\alpha(t)) + B_2(\alpha(t))K(\alpha(t)\Big)' \tag{3.47}$$

Com a transformação de variáveis $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))W$, (3.47) pode ser reescrita como

$$A(\alpha(t))W + WA(\alpha(t))' + B_2(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + Z(\alpha(t))'B_2(\alpha(t))' \tag{3.48}$$

Levando em conta que $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t) = 1$ e efetuando os produtos de variáveis dependentes de $\alpha(t)$, pode-se expressar (3.48) como $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)^2Q_j + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N}\alpha_j(t)\alpha_k(t)Q_{jk}$ com Q_j dada por (3.43) e Q_{jk} dada por (3.44). Impondo as condições do Teorema 3.3 tem-se que (2.31) é definida negativa para $\alpha_j(t) \geq 0$, $j = 1,\ldots,N$, o que assegura a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada. ∎

Comentário 3.9 O Teorema 3.3 fornece uma condição convexa com $1 + N(N+1)/2$ LMIs (incluindo $W > 0$) cuja solução permite determinar um ganho LPV que garante a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada.

Comentário 3.10 Note que não há necessidade de discretizar o espaço paramétrico para o cálculo do ganho $K(\alpha(t))$. Considerando que os parâmetros $\alpha(t)$ estão disponíveis em tempo real, o ganho LPV é calculado pela combinação linear das matrizes K_j, $j = 1, \ldots, N$, com $K_j = Z_j W^{-1}$, sendo Z_j e W soluções de (3.43)-(3.44). No caso de implementação prática do controlador, é possível calcular os ganhos K_j *a priori* e armazená-los para que $K(\alpha(t))$ seja atualizado em tempo real.

Comentário 3.11 As condições do Teorema 3.3 contêm a condição do Lema 2.3, já que é possível recuperar (2.33) fazendo $Z_j = Z$, $j = 1, \ldots, N$ em (3.43)-(3.44). As variáveis Z_j das condições do Teorema 3.3 fornecem um grau de liberdade adicional no projeto, permitindo estabilizar quadraticamente através de ganhos do tipo LPV sistemas que não são estabilizáveis com ganhos fixos calculados pela condição do Lema 2.3.

Comentário 3.12 Em [12], [23], [68], uma classe de controladores LPV baseados na estabilidade quadrática aplicados a sistemas lineares variantes no tempo na forma politópica foi estudada, mas apenas para o caso em que algumas matrizes do sistema são supostas fixas e invariantes no tempo, tornando o problema de síntese convexo, evitando a necessidade de interpolações entre ganhos localmente estabilizantes. Observe que, diferentemente de condições anteriores da literatura, o Teorema 3.3 é válido para o sistema (2.27) no caso em que todas as matrizes são supostas variantes no tempo de forma arbitrária.

Comentário 3.13 Foi demonstrado recentemente em [14] que, para taxas de variação arbitrárias dos parâmetros, a existência de um controlador estabilizante do tipo LPV implica a existência de um controlador estabilizante de ganho fixo (robusto), mas não existe um procedimento sistemático para a determinação deste controlador. Outras classes de funções de Lyapunov como as funções quadráticas por partes podem também ser utilizadas para sistemas com parâmetros que variam de forma arbitrária para o caso de um sistema linear variante no tempo descrito pela combinação convexa de dois pontos de operação [118], mas a complexidade computacional para resolver os problemas de análise e síntese é geralmente alta [1], [63].

O exemplo a seguir ilustra como é possível reduzir o conservadorismo da síntese baseada em funções de Lyapunov quadráticas utilizando uma estratégia de controle LPV.

Exemplo 3.7 Seja o sistema linear variante no tempo (2.27) com $N = 4$ vértices gerados aleatoriamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0505 & -0.8622 & -0.0756 \\ 0.2141 & -0.2204 & -0.6339 \\ 0.1507 & -0.2629 & -0.8448 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.5855 & 0.0137 & 0.4352 \\ -0.4456 & 0.0045 & -0.7803 \\ -0.3795 & 0.1126 & -1.0154 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.3094 & -0.6297 & 0.5251 \\ -0.2418 & -1.7352 & -0.7128 \\ 0.7354 & 0.7466 & -0.2276 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -0.5865 & -0.6177 & 0.8235 \\ -0.7109 & -1.0169 & 0.8893 \\ -0.5673 & -0.7368 & -0.6332 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; B_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; B_{24} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

Na investigação da estabilizabilidade quadrática do sistema, o Lema 2.3 não fornece solução ao problema, isto é, a condição (2.33) não fornece um ganho fixo quadraticamente estabilizante. Por outro lado, as condições do Teorema 3.3 fornecem um ganho LPV dado por (3.45)-(3.46) com

$$\begin{gathered} K_1 = \begin{bmatrix} -4.3803 & -11.7593 & -2.8405 \end{bmatrix} \;,\; K_2 = \begin{bmatrix} -3.4797 & -9.4745 & -2.4182 \end{bmatrix} \\ K_3 = \begin{bmatrix} -2.2846 & -7.2602 & -2.4343 \end{bmatrix} \;,\; K_4 = \begin{bmatrix} -0.9670 & -2.9866 & -1.5687 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{3.52}$$

e a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada é assegurada pela função de Lyapunov $v(x(t)) = x(t)'Px(t)$, $P = W^{-1}$ com

$$W = \begin{bmatrix} 234.8925 & -71.5817 & -27.1291 \\ -71.5817 & 32.7558 & 4.7304 \\ -27.1291 & 4.7304 & 45.9249 \end{bmatrix}$$

Considere a estabilização do sistema (2.27) com taxas de variações paramétricas limitadas, conforme descrito no Problema 2.4. Uma solução LMI para o problema é apresentada no teorema a seguir.

Teorema 3.4 *Dado um conjunto de parâmetros escalares reais $\rho_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que*

$$\begin{gathered} A_j W_j + W_j A_j' + B_{2j} Z_j + Z_j' B_{2j}' + \sum_{i=1}^{N-1} \pm \rho_i (W_i - W_N) < 0 \\ j = 1, \ldots, N \end{gathered} \tag{3.53}$$

$$\begin{gathered} A_j W_k + W_k A_j' + A_k W_j + W_j A_k' + B_{2j} Z_k + Z_k' B_{2j}' + B_{2k} Z_j + Z_j' B_{2k}' + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \pm \rho_i (W_i - W_N) < 0 \\ j = 1, \ldots, N-1 \quad , \quad k = j+1, \ldots, N \end{gathered} \tag{3.54}$$

então a lei de controle de realimentação de estados $u(t) = K(\alpha(t))x(t)$ com ganhos dependentes de parâmetros

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t)) W(\alpha(t))^{-1} \tag{3.55}$$

$$Z(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) Z_j, \; W(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) W_j, \; \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1, \; \alpha_j(t) \geq 0, \; j = 1, \ldots, N \tag{3.56}$$

assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.29)-(2.30) sujeito a taxas de variações paramétricas limitadas (2.14) com uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha(t)) = W(\alpha(t))^{-1}$.

Prova: Multiplicando (2.31) à esquerda e à direita por $P(\alpha(t))^{-1}$ e fazendo as trocas de variáveis

$$W(\alpha(t)) = P(\alpha(t))^{-1} \quad , \quad Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))W(\alpha(t)) \tag{3.57}$$

o lado esquerdo da expressão resultante pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} R(\alpha(t)) = {} & A(\alpha(t))W(\alpha(t)) + W(\alpha(t))A(\alpha(t))' \\ & + B_2(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + Z(\alpha(t))'B_2(\alpha(t))' + W(\alpha(t))\dot{P}(\alpha(t))W(\alpha(t)) \end{aligned} \tag{3.58}$$

De (3.57), $P(\alpha(t))W(\alpha(t)) = \mathbf{I}$, implicando que $\dot{P}(\alpha(t)) = -W(\alpha(t))^{-1}\dot{W}(\alpha(t))W(\alpha(t))^{-1}$, o que permite escrever (3.58) como

$$R(\alpha(t)) = A(\alpha(t))W(\alpha(t)) + W(\alpha(t))A(\alpha(t))' + B_2(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + Z(\alpha(t))'B_2(\alpha(t))' - \dot{W}(\alpha(t)) \tag{3.59}$$

Usando $(A, B_2)(\alpha(t))$ dados por (2.3) com $(B_1, C, D_1, D_2)(\alpha(t)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, as expressões de $Z(\alpha(t))$, $W(\alpha(t))$ dadas por (3.56) e efetuando os produtos das variáveis dependentes de $\alpha(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} R(\alpha(t)) = {} & \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2(t)\big(A_jW_j + W_jA_j' + B_{2j}Z_j + Z_j'B_{2j}'\big) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t)\big(A_jW_k + W_kA_j' + A_kW_j + W_jA_k' \\ & + B_{2j}Z_k + Z_k'B_{2j}' + B_{2k}Z_j + Z_j'B_{2k}'\big) - \sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)W_j \end{aligned} \tag{3.60}$$

Uma vez que $\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\right)^2 = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2(t) + 2\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t) = 1$ é possível reescrever (3.60) como

$$\begin{aligned} R(\alpha(t)) = {} & \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2(t)\big(A_jW_j + W_jA_j' + B_{2j}Z_j + Z_j'B_{2j}' - \sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)W_j\big) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t)\big(A_jW_k + W_kA_j' + A_kW_j + W_jA_k' \\ & + B_{2j}Z_k + Z_k'B_{2j}' + B_{2k}Z_j + Z_j'B_{2k}' - 2\sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)W_j\big) \end{aligned} \tag{3.61}$$

Levando em conta que $\dot{\alpha}_N(t) = -\sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)$ e $\sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)W_j = \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)(W_i - W_N)$, (3.61) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} R(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2(t)\big(A_j W_j + W_j A_j' + B_{2j} Z_j + Z_j' B_{2j}' - \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)(W_i - W_N)\big) \\ + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t)\big(A_j W_k + W_k A_j' + A_k W_j + W_j A_k' \\ + B_{2j} Z_k + Z_k' B_{2j}' + B_{2k} Z_j + Z_j' B_{2k}' - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\alpha}_i(t)(W_i - W_N)\big) \end{aligned} \tag{3.62}$$

Considerando os limitantes das taxas de variação dos parâmetros (2.14), as condições (3.53)-(3.54) são suficientes para garantir que $R(\alpha(t))$ seja definida negativa para $\alpha_j(t) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1$, verificando a condição de estabilizabilidade (2.31). ∎

Comentário 3.14 As condições do Teorema 3.4 fornecem uma maneira sistemática de calcular ganhos escalonados $K(\alpha(t))$ que estabilizam o sistema variante no tempo (2.27) sujeito a taxas de variações paramétricas limitadas (2.14)-(2.16) conhecidas *a priori*. Não há necessidade de discretização do espaço paramétrico [99], [104], [105], nem de hipóteses restritivas sobre a estrutura das incertezas [4], [61], [85], [102], [103], como é usual em muitas abordagens de ganho escalonado da literatura. As condições (3.53)-(3.54) são descritas por $N + N2^{N-1} + N(N-1)2^{N-2}$ LMIs (incluindo $W_j > 0$, $j = 1 \ldots N$) e, dado o número de vértices N, o problema pode ser resolvido por algoritmos de tempo polinomial [44].

Comentário 3.15 Argumentos análogos aos utilizados no Comentário 3.3 são válidos aqui para mostrar que as condições do Teorema 3.4 contêm a estabilizabilidade quadrática. Por exemplo, se a condição do Lema 2.3 for factível (com matrizes W e Z soluções de (2.33)) então as condições do Teorema 3.4 serão factíveis com $W_j = W$, $Z_j = Z$, $j = 1, \ldots, N$ para valores arbitrários de ρ_i, $i = 1, \ldots, N-1$. Da mesma forma, se as condições do Teorema 3.3 forem factíveis tendo como solução Z_j, $j = 1, \ldots, N$ e W, o Teorema 3.4 será factível com essas matrizes, para quaisquer valores de ρ_i, $i = 1, \ldots, N-1$. Por outro lado, se as condições do Teorema 3.4 fornecem solução para ρ_i, $i = 1, \ldots, N-1$ arbitrariamente grandes, esta solução será um conjunto de matrizes Z_j, $j = 1, \ldots, N$ que podem tender ou não a uma matriz fixa Z e matrizes W_j, $j = 1, \ldots, N$ que tendem para uma matriz fixa W, indicando que a estabilidade do sistema sujeito a taxas de variação arbitrárias é assegurada por uma função de Lyapunov quadrática. Nesse caso, se as matrizes Z_j, $j = 1, \ldots, N$ tendem a uma matriz fixa Z, os ganhos estabilizantes tendem a ganhos fixos. Se Z_j, $j = 1, \ldots, N$ não tendem a uma matriz fixa Z então os ganhos estabilizantes serão do tipo LPV.

Comentário 3.16 No caso de implementação prática da lei de controle com ganhos dependentes de parâmetros obtidos com o Teorema 3.4, pode-se calcular e armazenar W_j, Z_j, $j = 1, \ldots, N$ soluções de (3.53)-(3.54) e, conhecendo os parâmetros do sistema $\alpha(t)$ em tempo real, determinam-se $Z(\alpha(t))$ e $W(\alpha(t))$ por (3.56) e o ganho $K(\alpha(t))$ por (3.55).

Comentário 3.17 Muitas vezes os sistemas variantes no tempo que representam sistemas físicos são expressos com dependência afim em parâmetros variantes no tempo $\theta(t)$, que são supostos limitados e conhecidos em tempo real. Nesse caso, existe uma relação linear entre os parâmetros do sistema original $\theta(t)$ e os parâmetros da representação politópica $\alpha(t)$, bem como entre os limitantes das taxas de variação desses parâmetros, conforme descrito no Comentário 3.7. Assim, conhecendo os parâmetros $\theta(t)$ em tempo real, é possível obter $\alpha(t)$ através de uma transformação linear e os ganhos dependentes de parâmetros calculados pelas condições do Teorema 3.4 podem ser aplicados ao controle de sistemas na forma afim.

Observações análogas às do Comentário 3.6 são válidas para a investigação da estabilização do sistema por meio de ganhos dependentes de parâmetros no caso em que os limitantes ρ_i, $i = 1, \ldots, N-1$ não são dados *a priori*.

Comentário 3.18 No caso particular em que os limitantes das taxas de variações paramétricas não são conhecidos *a priori* mas sabe-se que os parâmetros variam lentamente, é possível projetar um ganho dependente de parâmetros resolvendo (3.53)-(3.54) com $\sum_{i=1}^{N-1} \pm\rho_i(W_i - W_N) = \mathbf{0}$ e, *a posteriori*, determinar-se um limitante $\delta > 0$ tal que $\mid \dot{W}(\alpha(t)) \mid \leq \delta\mathbf{I}$, para o qual esse ganho é válido, o que reduz a complexidade numérica do problema.

Impondo estruturas especiais às matrizes W_j, Z_j, $j = 1, \ldots, N$ do Teorema 3.4 é possível tratar problemas de controle sob restrições de estrutura como controle descentralizado e controle por realimentação de saída, conforme descrevem os corolários a seguir.

Corolário 3.1 *Suponha o sistema (2.27) composto por M subsistemas interconectados. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1, \ldots, N$ com estrutura bloco diagonal (bloc-diag) dadas por*

$$W_j = \text{bloc-diag}\{W_j^1, \ldots, W_j^M\}, \;\; Z_j = \text{bloc-diag}\{Z_j^1, \ldots, Z_j^M\} \tag{3.63}$$

tais que as condições do Teorema 3.4 sejam factíveis, então o ganho descentralizado dependente de parâmetros

$$K_D(\alpha(t)) = \text{bloc-diag}\{K(\alpha(t))^1, \ldots, K(\alpha(t))^M\} \tag{3.64}$$

estabiliza o sistema em questão.

Corolário 3.2 *Suponha que a saída do sistema* $y(t) \in \mathbb{R}^p$ *seja dada por* $y(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{array}\right] x(t)$. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas* $W_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e matrizes* $Z_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1, \ldots, N$ *da forma*

$$Z_j = \left[\begin{array}{c|c} Z_j^1 & \mathbf{0} \end{array}\right] \quad , \quad W_j = \left[\begin{array}{c|c} W_j^1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & W_j^2 \end{array}\right] \tag{3.65}$$

com $Z_j^1 \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $W_j^1 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *e* $W_j^2 \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, $j = 1, \ldots, N$ *tais que as condições do Teorema 3.4 sejam factíveis então o ganho de realimentação de saída*

$$K_S(\alpha(t)) = (\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) Z_j)(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) W_j)^{-1} \tag{3.66}$$

estabiliza o sistema em questão.

É interessante lembrar que sempre existe uma transformação de similaridade que permite transformar a matriz de saída C de um sistema linear em uma matriz de saída $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{array}\right]$.

Alguns exemplos do uso das condições do Teorema 3.4 e dos seus corolários para a estabilização de sistemas lineares variantes no tempo com parâmetros com taxas de variação limitadas são apresentados na seqüência.

Exemplo 3.8 Considere o sistema (2.27) com $N = 2$ vértices gerados aleatoriamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.8 \\ 0.3 & -1.3 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.3 \\ 0.5 & 0.0 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

com $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$, $\mid \dot{\alpha}_1(t) \mid = \mid \dot{\alpha}_2(t) \mid \leq \rho_1$. Esse sistema não é quadraticamente estabilizável pela condição do Lema 2.3 (ganho fixo) nem pelas condições do Teorema 3.3 (ganho LPV). Por outro lado, as condições do Teorema 3.4 permitem determinar ganhos dependentes de parâmetros $K(\alpha_1(t))$ que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada para taxas de variação limitadas no parâmetro $\alpha_1(t)$.

Para uma comparação do desempenho da estratégia de ganho escalonado do Teorema 3.4 com uma estratégia de ganho escalonado convencional baseada na interpolação de controladores que estabilizam o sistema localmente, considere $\alpha_1(t) = 0.5 + 0.5\sin(2t)$, tal que $\mid \dot{\alpha}_1(t) \mid \leq \rho_1 = 1$. As condições do Teorema 3.4 fornecem a solução

$$W_1 = \begin{bmatrix} 52.3249 & 21.6632 \\ 21.6632 & 10.2517 \end{bmatrix},\ Z_1 = \begin{bmatrix} -11.7960 & -47.6387 \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 44.3201 & 12.2531 \\ 12.2531 & 4.8696 \end{bmatrix},\ Z_2 = \begin{bmatrix} -47.2555 & -96.3004 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

que permitem calcular o ganho dependente de parâmetros através da expressão

$$K(\alpha_1(t)) = \Big(\alpha_1(t) Z_1 + (1 - \alpha_1(t)) Z_2\Big)\Big(\alpha_1(t) W_1 + (1 - \alpha_1(t)) W_2\Big)^{-1} \tag{3.71}$$

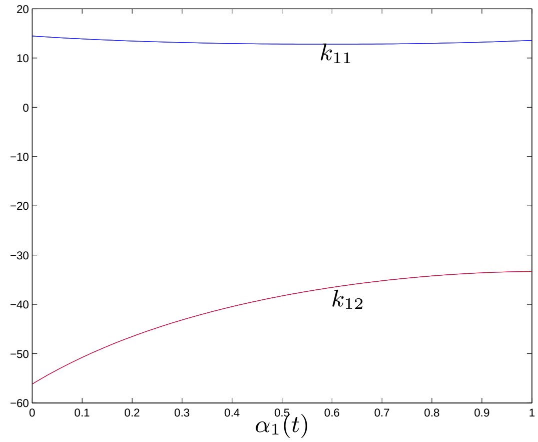

Figura 3.5: Elementos do ganho dependente de parâmetros (3.71) como funções não-lineares de $\alpha_1(t)$ para o sistema (2.27) com vértices (3.67)-(3.68), $\rho_1 = 1$.

Os elementos do ganho $K(\alpha_1(t))$ são funções não-lineares de $\alpha_1(t)$, conforme mostra a Figura 3.5.

Utilizando uma técnica de alocação de pólos para computar ganhos de realimentação de estados que estabilizam cada vértice de forma independente, é possível alocar os pólos de malha fechada do vértice #1 em $(-10, -20)$ e do vértice #2 em $(-30, -40)$ através dos ganhos

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2014.65 & -1043.45 \end{bmatrix} \; , \; K_2 = \begin{bmatrix} 2280.94 & -7542.81 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

que podem ser usados para fornecer a estratégia de ganho escalonado por interpolação

$$K_I(\alpha_1(t)) = \alpha_1(t)K_1 + (1 - \alpha_1(t))K_2 \tag{3.73}$$

A Figura 3.6 mostra a simulação da resposta temporal do sistema em malha fechada sujeito à estratégia baseada no ganho não-linear (3.71) (Teorema 3.4) e à estratégia de interpolação linear (3.73), tendo como condição inicial $x(0) = [1 \;\; 1]'$, marcada com $*$ nos planos de fase. Embora o sistema sujeito à estratégia de controle com ganho interpolado $K_I(\alpha(t))$ não seja instável, seu desempenho é claramente pior do que o do sistema sujeito à estratégia de controle com o ganho dependente de parâmetros obtido com o Teorema 3.4, que não requer o uso de discretizações nem de interpolações.

Exemplo 3.9 Seja o sistema (2.27) com $N = 3$ vértices gerados aleatoriamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4615 & 0.0041 & 0.0952 \\ 0.7684 & -0.0633 & 0.9556 \\ 0.1943 & 0.6249 & 0.2818 \end{bmatrix} \; , \; B_{21} = \begin{bmatrix} 0.7652 \\ 0.7489 \\ 0.9525 \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.0207 & 0.3513 & 0.4003 \\ 0.8288 & 0.2590 & 0.9077 \\ 0.6369 & 0.1098 & -0.0047 \end{bmatrix} \; , \; B_{22} = \begin{bmatrix} 0.9274 \\ 0.4693 \\ 0.3157 \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.4992 & 0.3527 & 0.1125 \\ 0.3698 & 0.7311 & 0.3518 \\ 0.2291 & 0.7293 & 0.3262 \end{bmatrix} \; , \; B_{23} = \begin{bmatrix} 0.3907 \\ 0.1346 \\ 0.1496 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

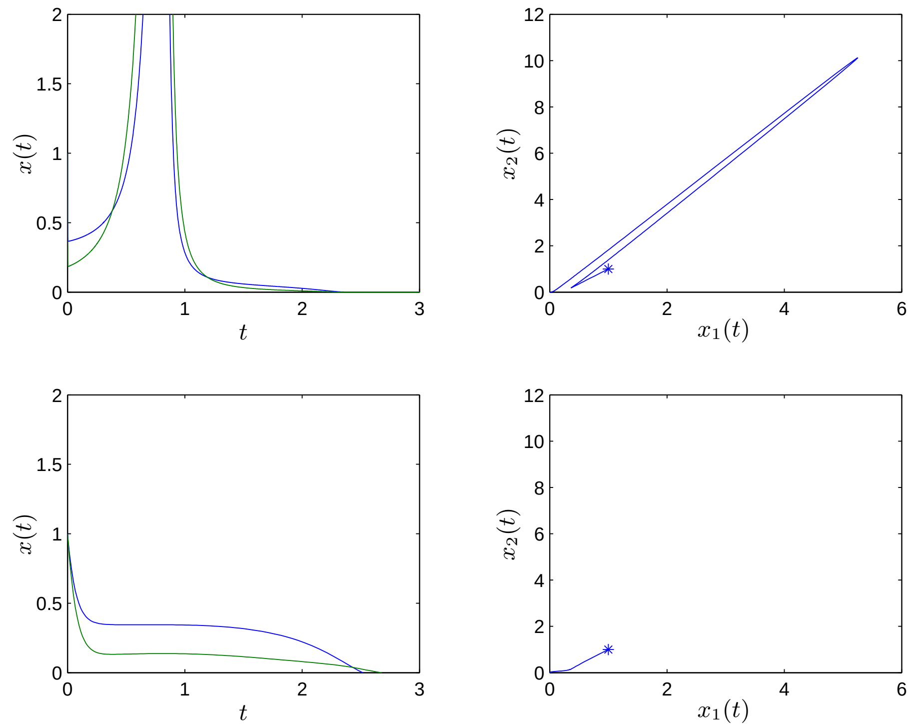

Figura 3.6: Trajetórias e planos de fase do sistema (2.27) com vértices (3.67)-(3.68), $\rho_1 = 1$, controlado por ganho dependente de parâmetros baseado em interpolação linear, dado por (3.73) (acima) e controlado pela estratégia de ganho dependente de parâmetros com elementos não-lineares obtida com o Teorema 3.4 (abaixo).

Esse sistema não é quadraticamente estabilizável através da condição do Lema 2.3 (ganhos fixos) nem com as condições do Teorema 3.3 (ganhos LPV). Entretanto, as condições do Teorema 3.4 podem fornecer ganhos estabilizantes para o sistema quando as taxas de variação dos parâmetros se encontram na região sombreada mostrada na Figura 3.7 (lembrando que $| \dot{\alpha}_1(t) | \leq \rho_1$, $| \dot{\alpha}_2(t) | \leq \rho_2$, $| \dot{\alpha}_3(t) | \leq \rho_1 + \rho_2$). Quando o parâmetro $\alpha_1(t)$ é considerado invariante no tempo ($\rho_1 = 0$), o sistema é estabilizável através

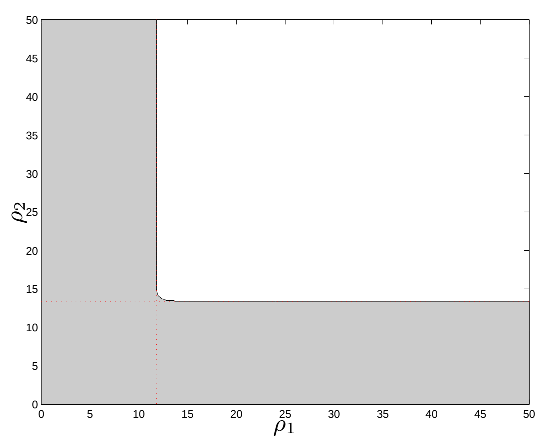

Figura 3.7: Domínio de estabilizabilidade (área sombreada) do sistema (2.27) com vértices (3.74)-(3.76) obtido através das condições do Teorema 3.4 em função dos limitantes das derivadas dos parâmetros do sistema ρ_1 e ρ_2.

das condições do Teorema 3.4 para valores de ρ_2 arbitrariamente grandes. De fato, esse comportamento ocorre até $\rho_1 = 11.8$. As mesmas considerações são válidas para $0 \leq \rho_2 \leq 13.4$. Em outras palavras, esse sistema não quadraticamente estabilizável pelo Lema 2.3 nem pelo Teorema 3.3 pode ser estabilizado por um ganho dependente de parâmetros $K(\alpha(t))$ calculado através do Teorema 3.4 inclusive para taxas de variação arbitrariamente grandes em alguns dos parâmetros.

Exemplo 3.10 Este exemplo trata o problema de controle por realimentação de saída. Considere o sistema (2.27) com vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4886 & 0.1740 \\ 0.8502 & -0.0006 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0.5841 \\ 0.0812 \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.7794 & 0.8577 \\ 0.5147 & -0.0392 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0.2725 \\ 0.7584 \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

e com saída $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$. O objetivo é obter um ganho para um controlador por realimentação de saída usando as considerações do Corolário 3.2. A condição do Lema 2.3 (estabilizabilidade quadrática) falha na determinação de um ganho fixo com estrutura $K = [k_{11} \quad 0]$. As condições do Teorema 3.4 permitem calcular ganhos estabilizantes na forma $K(\alpha_1(t)) = [k_{11}(\alpha_1(t)) \quad 0]$ para o sistema em questão, com $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$, $\mid \dot{\alpha}_1(t) \mid \leq \rho_1$. Por exemplo, para $\rho_1 = 1$, as condições do Teorema 3.4 fornecem como solução

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -54.2336 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Z_2 = \begin{bmatrix} -38.8358 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.4394 & 0 \\ 0 & 30.4217 \end{bmatrix} \quad , \quad W_2 = \begin{bmatrix} 6.1898 & 0 \\ 0 & 30.4127 \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

o que permite determinar o elemento $k_{11}(\alpha_1(t))$ do ganho dependente de parâmetros não-linear mostrado pela curva a na Figura 3.8. Para $\rho_1 = 10000$, as condições do Teorema 3.4 têm como solução

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -69.5612 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Z_2 = \begin{bmatrix} -45.4018 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

$$W_1 \simeq W_2 = \begin{bmatrix} 0.6066 & 0 \\ 0 & 40.4422 \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

que possibilita calcular o ganho $k_{11}(\alpha_1(t))$ linear mostrado pela curva b na Figura 3.8 (veja Comentário 3.15). É interessante mencionar que as condições do Teorema 3.3 (estabilidade quadrática com ganhos LPV) também são factíveis para o controle com restrição de estrutura em questão, resultando na solução

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -123.0399 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Z_2 = \begin{bmatrix} -79.9002 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.7713 & 0 \\ 0 & 54.9110 \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

com $k_{11}(\alpha_1(t))$ mostrado pela curva c na Figura 3.8.

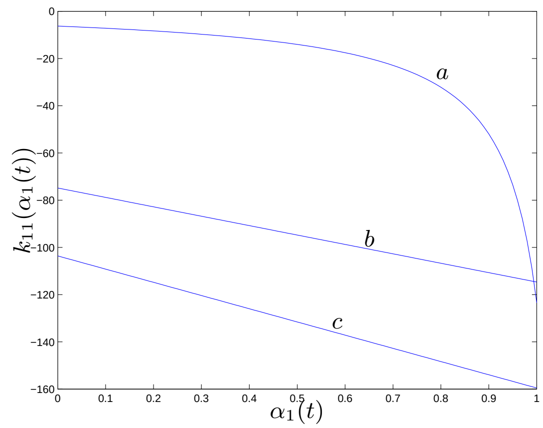

Figura 3.8: Elemento $k_{11}(\alpha_1(t))$ do ganho estabilizante ($k_{12}(\alpha_1(t)) = 0$) para o sistema (2.27) com vértices (3.77)-(3.78) sujeito ao controle por realimentação de saída calculado pelo Teorema 3.4 com $\rho_1 = 1$ (curva a) e com $\rho_1 = 10000$ (curva b) e pela estabilidade quadrática (taxas de variação arbitrárias) do Teorema 3.3 (curva c).

3.1.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$

O teorema a seguir apresenta uma solução LMI para o Problema 2.5 de cômputo de controle $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema sujeito taxas de variações paramétricas arbitrárias.

Teorema 3.5 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$R_j \triangleq \begin{bmatrix} A_jW + WA_j' + B_{2j}Z_j + Z_j'B_{2j}' & B_{1j} & WC_j' + Z_j'D_{2j}' \\ \star & -\mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.85)$$
$$j = 1, \ldots, N$$

$$R_{jk} \triangleq \begin{bmatrix} T_{11} & B_{1j} + B_{1k} & W(C_j + C_k)' + Z_k'D_{2j}' + Z_j'D_{2k}' \\ \star & -2\mathbf{I} & D_{1j}' + D_{1k}' \\ \star & \star & -2\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.86)$$
$$j = 1, \ldots, N-1 \ , \ k = j+1, \ldots, N$$

com

$$T_{11} = (A_j + A_k)W + W(A_j + A_k)' + B_{2j}Z_k + Z_k'B_{2j}' + B_{2k}Z_j + Z_j'B_{2k}' \qquad (3.87)$$

tenha uma solução, então a lei de controle $u(t) = K(\alpha(t))x(t)$, com ganhos LPV dados por (3.45)-(3.46) assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.37)-(2.39) sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$, com a função de Lyapunov quadrática (2.9), sendo $P = W^{-1}$.

Prova: Considere o lado esquerdo da expressão (2.40), com $P(\alpha(t)) = P$. Multiplique a expressão resultante à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e substitua P^{-1} por W para obter

$$\Theta(\alpha(t)) \triangleq \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha(t))W + WA_{cl}(\alpha(t))' & B_1(\alpha(t)) & WC_{cl}(\alpha(t))' \\ \star & -\mathbf{I} & D_1(\alpha(t))' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

Levando em consideração as expressões de $A_{cl}(\alpha(t))$ e $C_{cl}(\alpha(t))$ dadas por (2.30) e (2.39), fazendo a transformação de variáveis $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))W$ e levando em conta que $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) = 1$, é possível reescrever (3.88) como

$$\Theta(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2(t)\ R_j + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t)\ R_{jk} \tag{3.89}$$

com R_j dada por (3.85) e R_{jk} dada por (3.86)-(3.87). Portanto, a factibilidade das condições do Teorema 3.5 assegura que $\Theta(\alpha(t)) < 0$, o que é suficiente para que o sistema em malha fechada seja quadraticamente estável com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ. ■

Comentários análogos aos comentários 3.9 a 3.12 são válidos aqui. As restrições de estrutura do controlador abordadas nos corolários 3.1 e 3.2 podem ser diretamente aplicadas às condições do Teorema 3.5 para tratar os problemas de controle descentralizado e de realimentação de saída.

Comentário 3.19 Observe que ganhos LPV fornecidos pelo Teorema 3.5 podem assegurar a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ para casos em que a condição do Lema 2.4 não fornece um ganho fixo quadraticamente estabilizante, ao preço de se conhecer $\alpha(t)$ em tempo real para implementar a estratégia de controle LPV. Nos casos em que existe um ganho fixo quadraticamente estabilizante dado pela condição do Lema 2.4, as condições do Teorema 3.5 fornecem um controlador que assegura um valor de γ que é menor ou, no pior caso, igual ao obtido da estabilidade quadrática com ganhos fixos.

O exemplo seguinte mostra um caso em que uma estratégia LPV pode contribuir para melhorar o desempenho do sistema em malha fechada.

Exemplo 3.11 Seja o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ de um helicóptero em um vôo vertical sujeito a variações da velocidade do ar. O sistema em questão possui um modelo linear com quatro variáveis de estado e dois atuadores (veja [83] para detalhes) e é descrito por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1w(t) + B_2(t)u(t)$$

$$z(t) = Cx(t) + D_1 w(t) + D_2 u(t)$$

com matrizes

$$A(t) = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & a_{32}(t) & -0.7070 & a_{34}(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2(t) = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ b_{21}(t) & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.90}$$

sujeitas aos parâmetros variantes no tempo $-0.1134 \leq a_{32}(t) \leq 0.6844$, $-0.8667 \leq a_{34}(t) \leq 3.5125$ e $-0.7178 \leq b_{21}(t) \leq 6.8072$. As matrizes B_1, C, D_1 e D_2, supostas fixas e invariantes no tempo, são dadas por

$$B_1 = \mathbf{I}_{4\times 4}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; , \; D_1 = \mathbf{0}_{2\times 4} \; , \; D_2 = \mathbf{I}_{2\times 2} \tag{3.91}$$

O sistema pode ser representado por um politopo de $N = 8$ vértices, obtidos das combinações de valores máximos e mínimos dos parâmetros $a_{32}(t)$, $a_{34}(t)$ e $b_{21}(t)$. A condição do Lema 2.4 é factível, estabilizando quadraticamente o sistema através de um ganho fixo com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma_{L24} = 44.6126$. As condições do Teorema 3.5 fornecem ganhos LPV que também asseguram a estabilidade quadrática com $\gamma_{T35} = 40.8541$, o que representa uma redução de 8.4% no custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema com o uso da estratégia LPV.

O teorema a seguir fornece uma condição LMI para resolver o Problema 2.6 de controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas com taxas de variações paramétricas limitadas.

Teorema 3.6 *Dado um conjunto de parâmetros escalares reais $\rho_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1, \ldots, N$ tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$H_j \triangleq \begin{bmatrix} A_j W_j + W_j A_j' + B_{2j} Z_j + Z_j' B_{2j}' + \sum_{i=1}^{N-1} \pm\rho_i (W_i - W_N) & B_{1j} & W_j C_j' + Z_j' D_{2j}' \\ \star & -\mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.92}$$
$$j = 1, \ldots, N$$

$$H_{jk} \triangleq \begin{bmatrix} T_{11} & B_{1j} + B_{1k} & W_j C_k' + W_k C_j' + Z_j' D_{2k}' + Z_k' D_{2j}' \\ \star & -2\mathbf{I} & D_{1j}' + D_{1k}' \\ \star & \star & -2\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.93}$$
$$j = 1, \ldots, N-1 \; , \; k = j+1, \ldots, N$$

com

$$T_{11} = A_j W_k + W_k A_j' + A_k W_j + W_j A_k' + B_{2j} Z_k + Z_k' B_{2j}' + B_k Z_j + Z_j' B_k' + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \pm\rho_i (W_i - W_N) \tag{3.94}$$

tenha uma solução, então a lei de controle $u(t) = K(\alpha(t))x(t)$ com $K(\alpha(t))$ dado por (3.55)-(3.56) assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.37)-(2.39) com taxas de variações paramétricas limitadas (2.14), com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$, e matriz de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha(t)) = W(\alpha(t))^{-1}$.

Prova: Pré e pós-multiplique o lado esquerdo da desigualdade (2.40) por

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(t))^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Substituindo $A_{cl}(\alpha(t))$ e $C_{cl}(\alpha(t))$ por (2.30) e (2.39), respectivamente, e levando em conta as transformações de variáveis $P(\alpha(t))^{-1} = W(\alpha(t))$ e $Z(\alpha(t)) = K(\alpha(t))W(\alpha(t))$, tem-se a expressão

$$H(\alpha(t)) \triangleq \begin{bmatrix} T_{11}(\alpha(t)) & B_1(\alpha) & W(\alpha)C(\alpha)' + Z(\alpha)'D_2(\alpha)' \\ \star & -\mathbf{I} & D_1(\alpha)' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

e

$$\begin{aligned} T_{11}(\alpha(t)) = {} & A(\alpha(t))W(\alpha(t)) + W(\alpha(t))A(\alpha(t))' \\ & + B(\alpha(t))Z(\alpha(t)) + Z(\alpha(t))'B(\alpha(t))' + W(\alpha(t))\dot{P}(\alpha(t))W(\alpha(t)) \end{aligned} \tag{3.96}$$

Seguindo os passos da prova do Teorema 3.4, é possível reescrever (3.95)-(3.96) como

$$H(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2(t)\ \bar{H}_j + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(t)\alpha_k(t)\ \bar{H}_{jk} \tag{3.97}$$

com

$$\bar{H}_j = \begin{bmatrix} A_jW_j + W_jA_j' + B_{2j}Z_j + Z_j'B_{2j}' + \sum_{i=1}^{N-1}\dot{\alpha}_i(t)(W_i - W_N) & B_{1j} & W_jC_j' + Z_j'D_{2j}' \\ \star & -\mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.98}$$
$$j = 1, \ldots, N$$

$$\bar{H}_{jk} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & B_{1j} + B_{1k} & W_jC_k' + W_kC_j' + Z_j'D_{2k}' + Z_k'D_{2j}' \\ \star & -2\mathbf{I} & D_{1j}' + D_{1k}' \\ \star & \star & -2\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.99}$$
$$j = 1, \ldots, N-1\ ,\ k = j+1, \ldots, N$$

com

$$\bar{T}_{11} = A_jW_k + W_kA_j' + A_kW_j + W_jA_k' + B_{2j}Z_k + Z_k'B_{2j}' + B_kZ_j + Z_j'B_k' + 2\sum_{i=1}^{N-1}\dot{\alpha}_i(t)(W_i - W_N) \tag{3.100}$$

Levando em consideração os limitantes (2.14), as condições do Teorema 3.6 são suficientes para garantir que $H(\alpha(t)) < 0$, verificando portanto a condição (2.40) de estabilidade com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ. ∎

Comentários análogos aos comentários 3.6 e 3.14 a 3.18 são válidos aqui.

Comentário 3.20 Existem casos de sistemas em que as condições baseadas na estabilidade quadrática do Lema 2.4 e do Teorema 3.5 são infactíveis ou fornecem controladores com custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ que são muito altos. Se for possível levar em conta limitantes nas taxas de variação dos parâmetros no problema, as condições do Teorema 3.6 podem fornecer um ganho dependente de parâmetros que estabiliza o sistema com valores menores de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

O corolário a seguir estende a aplicação do Teorema 3.6 para tratar problemas de controle sob falhas de atuadores.

Corolário 3.3 *Considere o sistema (2.1)-(2.2) no caso em que as entradas de controle podem sofrer variações modeladas por $F(t)u(t)$, $F(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, com $F(t) = diag[f_1(t) \;\; f_2(t) \;\; \cdots \;\; f_m(t)]$. Os elementos de $F(t)$ são tais que $0 \le f_i(t) \le 1$, $i = 1,\ldots,m$, $|\dot{f}_i(t)| \le \beta_i$, $i = 1,\ldots,m$ e descrevem o possível grau de falha de cada atuador $u_i(t)$, $i = 1,\ldots,m$ do sistema. Por exemplo, se $f_1(t) = 1$, o atuador $u_1(t)$ opera sem falhas e se $f_1(t) = 0$, esse atuador falha completamente. Os limitantes β_i, $i = 1,\ldots,m$, informam o quão rapidamente o atuador pode perder eficiência durante a operação. Por exemplo, atuadores que são confiáveis podem ser modelados com taxas de variação (degradações) lentas enquanto atuadores não-confiáveis ou atuadores que são críticos podem ser modelados com taxas de variação rápidas. Também é possível assumir valores de β_i arbitrariamente grandes para se modelar falhas abruptas dos atuadores.*

As condições do Teorema 3.6 podem ser diretamente aplicadas nesse problema, avaliando-se os produtos das matrizes $B_2(\alpha(t))$ e $D_2(\alpha(t))$ por $F(t)$, o que permite representar um sistema politópico (2.1)-(2.2) originalmente com N vértices por um politopo com $2^m N$ vértices.

Na seqüência, um exemplo numérico ilustra como as condições do Teorema 3.6 podem assegurar melhores desempenhos dados por menores valores de γ (maiores atenuações de perturbações) para o sistema quando limitantes nas taxas de variação dos parâmetros são considerados.

Exemplo 3.12 Considere o segundo exemplo de [27], reescrito na forma politópica com vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7.9 & 1.0 \\ 8.0 & 14.8 \end{bmatrix},\; B_{11} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.47 \end{bmatrix},\; B_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\; D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -16.1 & 1.0 \\ -8.0 & -10.8 \end{bmatrix},\; B_{12} = B_{11},\; B_{22} = B_{21} \tag{3.103}$$

$$C_2 = C_1,\; D_{12} = D_{11},\; D_{22} = D_{21} \tag{3.104}$$

A condição do Lema 2.4 é factível estabilizando quadraticamente o sistema através do ganho fixo

$$K = \begin{bmatrix} -2.1082 & -28.4674 \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma_Q = 0.4704$. O mesmo valor de custo garantido é obtido quando se usam as condições do Teorema 3.5 (estabilidade quadrática com ganhos LPV).

As condições do Teorema 3.6 permitem calcular ganhos dependentes de parâmetros que estabilizam o sistema com custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ menores do que γ_Q (custo garantido obtido através da estabilizabilidade quadrática). Os valores de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ do sistema obtidos pelo Teorema 3.6 dados em função de ρ_1 (com $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$ e $\mid \dot{\alpha}_1(t) \mid \leq \rho_1$) são mostrados na Figura 3.9. Observe que para $0 \leq \rho_1 \leq 1.5$,

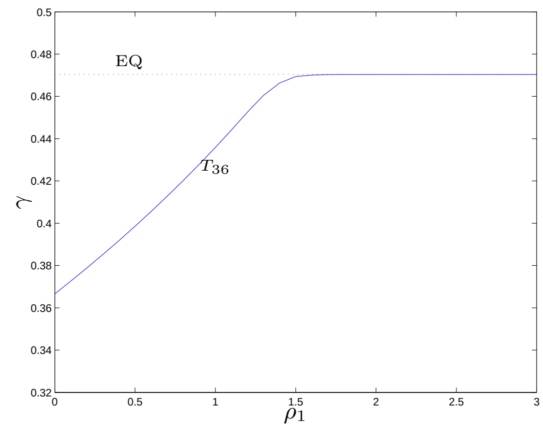

Figura 3.9: Custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (2.37)-(2.39) com vértices (3.101)-(3.104) dados em função de ρ_1 usando a condição do Lema 2.4 (estabilidade quadrática - EQ) e a condição do Teorema 3.6 (T_{36}).

as estimativas de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ dadas pelo Teorema 3.6 são sempre menores do que o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado pelo Lema 2.4. O menor valor obtido com o Teorema 3.6 é $\gamma = 0.3666$, para $\rho_1 = 0$ (caso invariante no tempo) e à medida que ρ_1 cresce, as estimativas de γ dadas pelo Teorema 3.6 tendem a $\gamma_Q = 0.4704$.

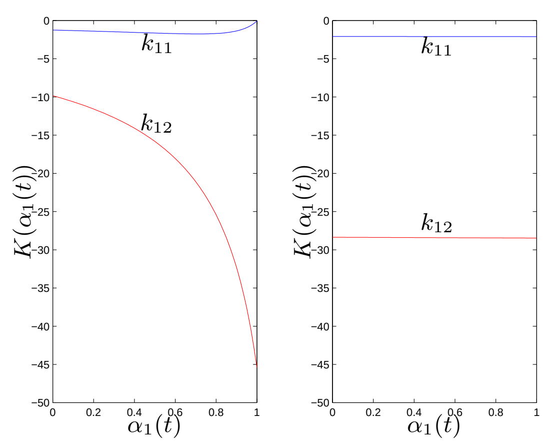

Figura 3.10: Elementos do ganho dependente de parâmetros $K(\alpha_1(t))$ obtido através das condições do Teorema 3.6 para $\rho_1 = 0$ (à esquerda) e $\rho_1 = 3$ (à direita).

A Figura 3.10 mostra os ganhos $K(\alpha_1(t))$ calculados com o Teorema 3.6 para $\rho_1 = 0$ e para $\rho_1 = 3$. Observe o comportamento não-linear dos elementos de $K(\alpha_1(t))$ para $\rho_1 = 0$. À medida que ρ_1 cresce, os elementos do ganho $K(\alpha_1(t))$ tendem a ganhos lineares. No caso desse exemplo, os elementos do ganho dependente de parâmetros convergem para os ganhos fixos obtidos através da estabilidade quadrática do Lema 2.4, como pode ser visto na Figura 3.10 para o caso de $\rho_1 = 3$.

3.2 Caso discreto no tempo

3.2.1 Estabilizabilidade

Uma condição descrita em termos de LMIs para a solução do Problema 2.7 de cômputo de ganhos dependentes de parâmetros que estabilizam o sistema com matrizes $(A, B_2)(\alpha(k))$ é dada no teorema a seguir.

Teorema 3.7 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $F_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1,\ldots,N$ tais que*

$$V_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} G_j + G_j' - S_j & G_j'A_j' + F_j'B_{2j}' \\ \star & S_i \end{bmatrix} > 0 \qquad (3.106)$$
$$i = 1,\ldots,N\ ,\ j = 1,\ldots,N$$

$$V_{ijk} \triangleq \begin{bmatrix} G_j + G_j' + G_k + G_k' - S_j - S_k & G_j'A_k' + G_k'A_j' + F_j'B_{2k}' + F_k'B_{2j}' \\ \star & 2S_i \end{bmatrix} > 0 \qquad (3.107)$$
$$i = 1,\ldots,N\ ,\ j = 1,\ldots,N-1\ ,\ k = j+1,\ldots,N$$

então a lei de controle $u(k) = K(\alpha(k))x(k)$ com

$$K(\alpha(k)) = F(\alpha(k))G(\alpha(k))^{-1} \qquad (3.108)$$

$$F(\alpha(k)) = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j(k)F_j\ ,\ G(\alpha(k)) = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j(k)G_j\ ,\ \sum_{j=1}^{N}\alpha_j(k) = 1\ ,\ \alpha_j(k) \geq 0\ ,\ j = 1,\ldots,N \qquad (3.109)$$

assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.73)-(2.74) sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias em $(A, B_2)(\alpha(k))$, com uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha(k)) = S(\alpha(k))^{-1}$.

Prova: Em primeiro lugar, note que a expressão

$$\begin{bmatrix} G(\alpha(k)) + G(\alpha(k))' - S(\alpha(k)) & G(\alpha(k))'A_{cl}(\alpha(k))' \\ A_{cl}(\alpha(k))G(\alpha(k)) & S(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} > 0 \qquad (3.110)$$

equivale à expressão de projeto (2.77) pois: i) se (2.77) tem solução $S(\alpha(k))$, então (3.110) é factível com $G(\alpha(k)) = G(\alpha(k))' = S(\alpha(k))$; ii) se (3.110) é factível, então pré e pós-multiplicando (3.110) por $T = [-A(\alpha(k))\ \ \mathbf{I}]$ e por T', respectivamente, tem-se $S(\alpha(k+1)) - A_{cl}(\alpha(k))S(\alpha(k))A(\alpha(k))' > 0$, que é complemento de Schur de (2.77).

Substitua $A_{cl}(\alpha(k))$ em (3.110) por $A(\alpha(k) + B_2(\alpha(k))K(\alpha(k))$ e faça a troca de variáveis $F(\alpha(k)) = K(\alpha(k))G(\alpha(k))$. Levando em conta as expressões (2.44) para $(A, B_2)(\alpha(k))$, (3.109) para $(F, G)(\alpha(k))$,

$S(\alpha(k)) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) S_j$, $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) = 1$, $\alpha_j(k) \geq 0$, $j = 1, \ldots, N$, e, seguindo a idéia apresentada em (2.53), adotando $S(\alpha(k+1)) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i(k) S_i$, $\sum_{i=1}^{N} \beta_i(k) = 1$, $\beta_i(k) \geq 0$, $i = 1, \ldots, N$ e multiplicando a expressão resultante por $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k) = 1$ e por $\sum_{i=1}^{N} \beta_i(k) = 1$, é possível reescrever (3.110) como

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(k)^2 \sum_{i=1}^{N} \beta_i(k) V_{ij} + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j(k)\alpha_k(k) \sum_{i=1}^{N} \beta_i(k) V_{ijk} \tag{3.111}$$

com V_{ij} dada por (3.106) e V_{ijk} dada por (3.107). A factibilidade das condições do Teorema 3.7 é suficiente para que a expressão (3.111) seja definida positiva, o que verifica a expressão (3.110) que assegura a estabilidade do sistema em malha fechada. ■

Um comentário análogo ao Comentário 2.12 é válido aqui.

Comentário 3.21 As condições do Teorema 3.7 são particularmente úteis para tratar o caso em que $(A, B_2)(\alpha(k))$ são matrizes variantes no tempo. Diferentemente da condição do Lema 2.10 que considera a matriz B_2 como invariante no tempo ou da condição mencionada no Comentário 2.14 que só permite computar ganhos fixos, a factibilidade das expressões (3.106)-(3.107) permite calcular ganhos dependentes de parâmetros que estabilizam o sistema $(A, B_2)(\alpha(k))$ através das expressões analíticas (3.108)-(3.109), sem a necessidade de discretizações no espaço paramétrico nem de interpolação de controladores obtidos para pontos específicos do espaço dos parâmetros. O problema de projeto através Teorema 3.7 consiste na solução de $N + N^2 + N^2(N-1)/2$ LMIs (incluindo $S_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$).

Comentário 3.22 No caso específico em que $B_2(\alpha(k)) = B_2$ (matriz de controle fixa e invariante no tempo), a condição (3.106) (condição do Lema 2.10) é suficiente para resolver o problema.

Comentário 3.23 A condição (2.82) trata o caso de $B_2(\alpha(k))$ variante no tempo buscando um ganho fixo estabilizante para o sistema. Entretanto, há casos em que essa condição é infactível e as condições do Teorema 3.7 fornecem solução, permitindo o cômputo de um ganho dependente de parâmetros que estabiliza o sistema ao preço de se resolver um problema com maior número de LMIs e de se dispor em tempo real dos parâmetros $\alpha(k)$ para a implementação da estratégia de ganho escalonado, conforme ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3.13 Considere o sistema (2.71) com $N = 2$ vértices gerados aleatoriamente dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.3158 & 0.2261 & 0.4781 & 0.4588 \\ 0.0473 & 0.6081 & 0.2509 & 0.2790 \\ 0.1581 & 0.4883 & 0.9031 & 0.6497 \\ 0.7402 & 0.4455 & 0.8582 & 0.1879 \end{bmatrix} , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0.6594 \\ 0.9802 \\ 0.2648 \\ 0.9155 \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.7926 & 0.9792 & 0.4006 & 0.7986 \\ 0.4810 & 0.1183 & 0.1389 & 0.2469 \\ 0.7169 & 0.8413 & 0.6237 & 0.4428 \\ 0.7596 & 0.8886 & 0.8093 & 0.2588 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0.0816 \\ 0.1295 \\ 0.5339 \\ 0.7519 \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

A condição do Lema 2.10 não pode ser aplicada pois a matriz $B_2(\alpha(k))$ é variante no tempo. Esse sistema também não é estabilizável por ganhos fixos calculados pela condição descrita no Comentário 2.14. Entretanto, as condições do Teorema 3.7 permitem calcular um ganho dependente de parâmetros na forma

$$K(\alpha_1(k)) = \begin{bmatrix} k_{11}(\alpha_1(k)) & k_{12}(\alpha_1(k)) & k_{13}(\alpha_1(k)) & k_{14}(\alpha_1(k)) \end{bmatrix}$$

cujos elementos são mostrados na Figura 3.11 em função de $\alpha_1(k)$ (sendo $\alpha_2(k) = 1 - \alpha_1(k)$). Observe o

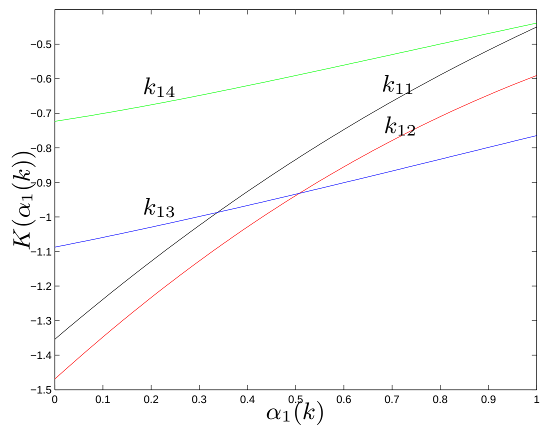

Figura 3.11: Elementos do ganho dependente de parâmetros $K(\alpha_1(k))$ calculados com o Teorema 3.7 que estabilizam o sistema (2.71) com vértices (3.112)-(3.113) para taxas de variações paramétricas arbitrárias.

comportamento claramente não-linear dos elementos $k_{11}(\alpha_1(k))$ e $k_{12}(\alpha_1(k))$. Num caso de implementação prática do controlador, as matrizes F_j e G_j, $j = 1, 2$ são calculadas *a priori* e armazenadas. A partir do valor de $\alpha_1(k)$ (suposto disponível em tempo real), obtêm-se as matrizes $F(\alpha_1(k))$ e $G(\alpha_1(k))$ pela expressão (3.109) e o ganho $K(\alpha_1(k))$ é calculado através de (3.108). Note que não há necessidade de discretizações do espaço paramétrico para obter a solução do problema de síntese. A estabilidade do sistema em malha fechada é garantida pela matriz de Lyapunov dependente de parâmetros variante no tempo

$$S(\alpha_1(k)) = \alpha_1(k)S_1 + (1 - \alpha_1(k))S_2$$

com

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.3650 & -0.0192 & -0.0296 & -0.0265 \\ -0.0192 & 0.3564 & -0.0660 & -0.0612 \\ -0.0296 & -0.0660 & 0.3139 & -0.0529 \\ -0.0265 & -0.0612 & -0.0529 & 0.3139 \end{bmatrix} \quad , \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0.3481 & -0.0531 & -0.0204 & -0.0782 \\ -0.0531 & 0.3399 & -0.0677 & -0.0901 \\ -0.0204 & -0.0677 & 0.3640 & -0.0414 \\ -0.0782 & -0.0901 & -0.0414 & 0.3031 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

obtidas da solução de (3.106)-(3.107).

Esse exemplo mostra como as condições do Teorema 3.7 podem reduzir o conservadorismo do problema de estabilização de sistemas com matrizes $(A,B_2)(\alpha(k))$ sujeitas a taxas de variações paramétricas arbitrárias utilizando uma estratégia de ganhos escalonados.

3.2.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Uma solução LMI para o Problema 2.8 de controle $\mathcal{H}_\infty$ do sistema que possui todas as matrizes $(A,B_1,B_2,C,D_1,D_2)(\alpha(k))$ sujeitas a taxas de variações paramétricas arbitrárias é dada no teorema a seguir.

Teorema 3.8 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $F_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j=1,\ldots,N$ tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j' - S_j & \mathbf{0} & G_j'A_j' + F_j'B_{2j}' & G_j'C_j' + F_j'D_{2j}' \\ \star & \mathbf{I} & B_{1j}' & D_{1j}' \\ \star & \star & S_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \qquad (3.115)$$
$$i=1,\ldots,N \ , \ j=1,\ldots,N$$

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j' + G_k + G_k' - S_j - S_k & \mathbf{0} & G_j'A_k' + G_k'A_j' + F_j'B_{2k}' + F_k'B_{2j}' & T_{14} \\ \star & \mathbf{I} & B_{1j}' + B_{1k}' & D_{1j}' + D_{1k}' \\ \star & \star & 2S_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & 2\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \qquad (3.116)$$
$$i=1,\ldots,N \ , \ j=1,\ldots,N-1 \ , \ k=j+1,\ldots,N$$

$$T_{14} = G_j'C_k' + G_k'C_j' + F_j'D_{2k}' + F_k'D_{2j}' \qquad (3.117)$$

tenha solução, então a lei de controle $u(k)=K(\alpha(k))x(k)$, com $K(\alpha(k))$ dado por (3.108)-(3.109), assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.83)-(2.85) sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias em $(A,B_1,B_2,C,D_1,D_2)(\alpha(k))$, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma=\sqrt{\mu^*}$, $\mu^*=\min\mu$, com uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha(k))=S(\alpha(k))^{-1}$.

Prova: Segue os passos da prova do Teorema 3.7. ∎

Comentários análogos aos comentários 2.12 e 3.21 a 3.23 são válidos para o Teorema 3.8.

Uma extensão direta da idéia de [78] (veja o Comentário 2.14) para tratar o controle $\mathcal{H}_\infty$ com ganhos robustos é apresentada no corolário a seguir.

Corolário 3.4 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j=1,\ldots,N$ e matrizes $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} G+G'-S_j & \mathbf{0} & G'A_j'+F'B_{2j}' & G'C_j'+F'D_{2j}' \\ \star & \mathbf{I} & B_{1j}' & D_{1j}' \\ \star & \star & S_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \tag{3.118}$$
$$i=1,\ldots,N \ , \ j=1,\ldots,N$$

tenha solução, então a lei de controle $u(k)=Kx(k)$ com $K=FG^{-1}$ assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.83)-(2.85) com matrizes $(A,B_1,B_2,C,D_1,D_2)(\alpha(k))$ sujeitas a taxas de variações paramétricas arbitrárias, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma=\sqrt{\mu^*}$, $\mu^*=\min\mu$, com uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha(k))=S(\alpha(k))^{-1}$.

Prova: Considere a expressão (2.88). Faça $G(\alpha(k))=G$, $A_{cl}(\alpha(k))=A(\alpha(k))+B_2(\alpha(k))K$, $C_{cl}(\alpha(k))=C(\alpha(k))+D_2(\alpha(k))K$ e utilize a transformação de variáveis $F=KG$ para recuperar a condição (3.118) do Corolário 3.4. ∎

Comentário 3.24 A condição do Corolário 3.4 contém a condição do Lema 2.11 (estabilizabilidade quadrática) pois sempre que existir uma matriz de Lyapunov fixa S, solução para o Lema 2.11, o Corolário 3.4 será factível com $G=G'=S_j=S$. Note entretanto que a condição do Lema 2.12 não permite tratar problemas nos quais as matrizes de controle $(B_2,D_2)(\alpha(k))$ são variantes no tempo. Por outro lado, esses problemas podem ser tratados pelas condições do Corolário 3.4 (ganhos robustos) e também com as condições do Teorema 3.8 (ganhos dependentes de parâmetros). Há casos de sistemas que não são estabilizáveis pela condição do Corolário 3.4 ou, se (3.118) for factível, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ obtido é muito elevado. Nesses casos, a condição do Teorema 3.8 pode melhorar os resultados do problema de síntese, fornecendo um ganho dependente de parâmetros que estabiliza o sistema com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ menor, ao preço de se resolver uma condição com maior número de LMIs e de se implementar uma estratégia de controle de ganhos escalonados.

Exemplo 3.14 Considere o sistema (2.42)-(2.43) com $N=2$ vértices

$$A_1=\begin{bmatrix} 0.28 & -0.315 \\ 0.63 & -0.84 \end{bmatrix} \ , \ B_{11}=B_{21}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.119}$$

$$C_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ D_{11}=D_{21}=0 \tag{3.120}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 0.52 & 0.77 \\ -0.7 & -0.07 \end{bmatrix} \ , \ B_{12}=B_{11} \ , \ B_{22}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.121}$$

$$C_2=C_1 \ , \ D_{12}=D_{22}=0 \tag{3.122}$$

Esse sistema foi estudado no exemplo 2 de [25], para o caso particular em que as matrizes $B_2(\alpha(k))$ são fixas e invariantes no tempo. O objetivo aqui é estudar um caso mais geral, em que $B_{21}\neq B_{22}$.

A condição do Corolário 3.4 é factível, estabilizando o sistema com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma_{C34} = 6.4938$, com matrizes

$$F' = \begin{bmatrix} 2.4480 \\ 3.3628 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 6.5031 & 0.7675 \\ 1.0013 & 4.9480 \end{bmatrix},\ S_1 = \begin{bmatrix} 7.2183 & 1.7171 \\ 1.7171 & 5.4663 \end{bmatrix},\ S_2 = \begin{bmatrix} 6.8540 & 0.1317 \\ 0.1317 & 5.6480 \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

e com ganho robusto

$$K = FG^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2784 & 0.6364 \end{bmatrix} \tag{3.124}$$

As condições do Teorema 3.8 permitem melhorar esse resultado, estabilizando o sistema com $\gamma_{T38} = 4.9187$, o que representa uma redução de 24.3% no valor de γ. As matrizes solução do Teorema 3.8 são

$$F_1 = \begin{bmatrix} -2.3079 & 3.3073 \end{bmatrix} \quad , \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1.4653 & -1.8766 \end{bmatrix} \tag{3.125}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 5.0467 & -0.6525 \\ -1.2692 & 7.4506 \end{bmatrix} \quad , \quad G_2 = \begin{bmatrix} 7.6666 & -4.1665 \\ -0.0571 & 7.6578 \end{bmatrix} \tag{3.126}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 6.9920 & 1.4329 \\ 1.4329 & 9.8275 \end{bmatrix} \quad , \quad S_2 = \begin{bmatrix} 6.8224 & -4.2757 \\ -4.2757 & 10.6498 \end{bmatrix} \tag{3.127}$$

e, como $\alpha_2(k) = 1 - \alpha_1(k)$, o ganho dependente de parâmetros é dado por

$$K(\alpha_1(k)) = F(\alpha_1(k))G(\alpha_1(k))^{-1} \tag{3.128}$$

$$F(\alpha_1(k)) = \alpha_1(k)F_1 + (1 - \alpha_1(k))F_2 \quad , \quad G(\alpha_1(k)) = \alpha_1(k)G_1 + (1 - \alpha_1(k))G_2 \tag{3.129}$$

Capítulo 4

Sistemas chaveados lineares

Este capítulo apresenta condições suficientes na forma de LMIs para o cômputo de ganhos chaveados que asseguram a estabilidade com um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ (problemas 2.9 e 2.10) e permitem a alocação de pólos com restrições de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ (problemas 2.11 e 2.12) para sistemas chaveados lineares contínuos no tempo. Para o caso discreto no tempo, são apresentadas condições na forma de LMIs que são suficientes para o cômputo de ganhos fixos e de ganhos chaveados que estabilizam o sistema com um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ (problemas 2.13 e 2.14) e de condições que asseguram alocação de pólos com restrições de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ (problemas 2.15 e 2.16). Testes numéricos incluindo uma aplicação em circuitos elétricos chaveados e também tratando o problema de falha de atuadores mostram que as condições propostas permitem melhorar o desempenho de sistemas chaveados lineares sujeitos a funções de chaveamento arbitrárias conhecidas em tempo real.

4.1 Caso contínuo no tempo

4.1.1 Estabilizabilidade

O teorema a seguir fornece uma solução para o Problema 2.9 de estabilização quadrática através de ganhos chaveados.

Teorema 4.1 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que*

$$A_j W + W A_j' + B_{2j} Z_j + Z_j' B_{2j}' < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{4.1}$$

então a lei de controle $u(t) = K_{\xi(t)} x(t)$, em que a função de chaveamento $\xi(t)$ seleciona o ganho ativo dentre o conjunto de ganhos $K_j = Z_j W^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$, estabiliza o sistema chaveado linear em malha fechada (2.99)-(2.100) para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária, através de uma função de Lyapunov quadrática com $P = W^{-1}$.

Prova: Note que a condição (4.1) é uma particularização das condições de estabilização quadrática de sistemas lineares variantes no tempo apresentadas no Teorema 3.3. Para o caso de sistemas chaveados lineares como (2.97), a expressão (3.47) é reescrita como

$$Q_{\xi(t)} \triangleq \big(A_{\xi(t)} + B_{2\xi(t)}K_{\xi(t)}\big)W + W\big(A_{\xi(t)} + B_{2\xi(t)}K_{\xi(t)}\big)' \tag{4.2}$$

Considerando a transformação de variáveis $Z_{\xi(t)} = K_{\xi(t)}W$, tem-se

$$Q_{\xi(t)} = A_{\xi(t)}W + WA'_{\xi(t)} + B_{2\xi(t)}Z_{\xi(t)} + Z'_{\xi(t)}B'_{2\xi(t)} \tag{4.3}$$

e como a função de chaveamento $\xi(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \{1, \ldots, N\}$ somente pode assumir valores em $j = 1, \ldots, N$, então (4.1) é suficiente para garantir que $Q_{\xi(t)} < 0$, assegurando a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada. ∎

Um comentário análogo ao Comentário 3.11 é válido aqui.

Comentário 4.1 O Teorema 4.1 fornece um teste convexo com $1 + N$ LMIs (incluindo $W > 0$) que permite determinar ganhos chaveados que estabilizam quadraticamente o sistema em muitos casos para os quais não existem ganhos fixos quadraticamente estabilizantes calculados através do Lema 2.3.

4.1.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Uma solução para o Problema 2.10 de controle $\mathcal{H}_\infty$ por ganhos chaveados é dada no teorema a seguir.

Teorema 4.2 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_jW + WA'_j + B_{2j}Z_j + Z'_jB'_{2j} & B_{1j} & WC'_j + Z'_jD'_{2j} \\ \star & -\mathbf{I} & D'_{1j} \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{4.4}$$

tenha uma solução, então a lei de controle $u(t) = K_{\xi(t)}x(t)$, em que a função de chaveamento $\xi(t)$ seleciona o ganho ativo dentre o conjunto de ganhos $K_j = Z_jW^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$, estabiliza o sistema chaveado linear em malha fechada (2.101)-(2.103) para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$ e com uma função de Lyapunov quadrática com $P = W^{-1}$.

Prova: A expressão (3.88) pode ser representada como

$$\Theta_{\xi(t)} \triangleq \begin{bmatrix} A_{cl\xi(t)}W + WA'_{cl\xi(t)} & B_{1\xi(t)} & WC'_{cl\xi(t)} \\ \star & -\mathbf{I} & D'_{1\xi(t)} \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

trocando as matrizes $A_{cl}(\alpha(t))$ e $C_{cl}(\alpha(t))$ pelas matrizes do sistema chaveado $A_{cl\xi(t)}$ e $C_{cl\xi(t)}$. Escrevendo $A_{cl\xi(t)} = A_{\xi(t)}+B_{2\xi(t)}K_{\xi(t)}$, $C_{cl\xi(t)} = C_{\xi(t)}+D_{2\xi(t)}K_{\xi(t)}$, fazendo a substituição $Z_{\xi(t)} = K_{\xi(t)}W$ e lembrando que $\xi(t)$ só assume valores em $j = 1, \ldots, N$, a condição (4.4) é suficiente para que $\Theta_{\xi(t)} < 0$, assegurando a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ. ∎

Comentários análogos aos comentários 3.11 e 4.1 são aplicáveis ao Teorema 4.2.

Comentário 4.2 Existem casos em que a condição do Lema 2.4 é infactível ou, se é factível, fornece altos valores de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema. A condição do Teorema 4.2 permite reduzir o valor dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$, melhorando o desempenho do sistema em malha fechada, ao preço de se implementar uma técnica de controle com ganhos chaveados que exige, por exemplo, a detecção dos instantes de chaveamento e o uso de estratégias para troca de ganhos.

4.1.3 Alocação de pólos

Uma solução LMI para o Problema 2.11 de estabilização com alocação de pólos é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 4.3 *Dados $d \geq 0$ e $r > 0$, se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que*

$$\begin{bmatrix} A_jW + WA_j' + B_{2j}Z_j + Z_j'B_{2j}' + 2dW & A_jW + B_{2j}Z_j + dW \\ \star & -rW \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{4.6}$$

então a lei de controle $u(t) = K_{\xi(t)}x(t)$, em que a função de chaveamento $\xi(t)$ seleciona o ganho ativo dentre o conjunto de ganhos $K_j = Z_jW^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$, estabiliza o sistema chaveado em malha fechada (2.99)-(2.100) para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária através de uma função de Lyapunov quadrática com $P = W^{-1}$, assegurando a cada subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ a alocação de pólos no círculo $\mathcal{C}_c$ especificado na Figura 2.1.

Prova: Considere a expressão (4.6), com $Z_j = K_jW$. Utilizando complemento de Schur, a expressão resultante pode ser escrita como

$$(A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})W + W(A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})' + \frac{1}{r}(A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})W(A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})' < 0$$

$$j = 1, \ldots, N \tag{4.7}$$

Observe que (4.7) é igual à expressão (2.106) trocando A_j por $A_j + B_{2j}K_j$, que assegura a alocação de pólos desejada para cada subsistema linear do sistema chaveado. ∎

Comentários análogos aos comentários 3.11 e 4.1 são válidos aqui.

Comentário 4.3 Existem casos em que a condição do Lema 2.13 não fornece ganho fixo que estabiliza o sistema com a alocação de pólos desejada e a condição do Teorema 4.3 é factível, fornecendo ganhos chaveados que resolvem o problema. As matrizes Z_j, $j = 1, \ldots, N$, utilizadas no Teorema 4.3 fornecem um grau de liberdade adicional ao projeto, permitindo alocações de pólos mais restritivas (melhores respostas transitórias) do que no caso de um projeto com matrizes Z fixas dado pelo Lema 2.13.

Comentário 4.4 Pela expressão (4.7), é possível notar que a existência de solução para a condição do Teorema 4.3 (com $d \geq 0$ e $r > 0$) implica

$$(A_j + B_{2j}K_j)W + W(A_j + B_{2j}K_j)' < -2dW - \frac{1}{r}(A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})W(A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})' < 0$$
$$j = 1, \ldots, N \quad (4.8)$$

sendo que $(A_j + B_{2j}K_j)W + W(A_j + B_{2j}K_j)' < 0$ é uma condição suficiente para garantir a estabilidade quadrática do sistema chaveado em malha fechada. Portanto, a factibilidade da condição do Teorema 4.3 garante a estabilidade do sistema chaveado sujeito a funções de chaveamento arbitrárias.

Comentário 4.5 Embora o conceito de autovalor não possa ser aplicado a sistemas chaveados, a factibilidade da condição do Teorema 4.3 garante que os autovalores de cada subsistema linear do sistema chaveado estão contidos no círculo $\mathcal{C}_c$ da Figura 2.1. Nesse sentido, a resposta transitória devido a comutações de um subsistema $A_j + B_{2j}K_j$ para um subsistema $A_k + B_{2k}K_k$, $j, k = 1, \ldots, N$, $j \neq k$, respeitará as restrições dinâmicas (sobre-sinal, tempo de acomodação, freqüência de oscilação) dadas pela escolha de d e r sempre que o intervalo de tempo entre dois instantes de chaveamento consecutivos for longo o suficiente para permitir a acomodação de cada modo. Esse intervalo de tempo é chamado tempo de permanência (em inglês, *dwell time* [76]) em cada subsistema do sistema chaveado. Note que se todos os autovalores de $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ (pólos) estão contidos no círculo $\mathcal{C}_c$ da Figura 2.1, então, no pior caso, a resposta transitória mais lenta estaria associada ao pólo localizado mais próximo de $(-d, 0)$. Para estimar o tempo de permanência em cada subsistema do sistema chaveado linear, pode-se considerar a constante de tempo $\tau = 1/d$ e supor um tempo de permanência igual a 3τ ou 5τ.

É possível combinar os resultados que incluem restrições de alocação de pólos (especificação de resposta transitória) com os resultados que asseguram um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ para o sistema em malha fechada (robustez do sistema chaveado sujeito a perturbações), fornecendo uma solução ao Problema 2.12, conforme descrito no teorema a seguir.

Teorema 4.4 *Dados $d \geq 0$, $r > 0$, se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 1, \ldots, N$, tais que o problema de otimização*

$$\min \quad \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} T_{11} & A_jW + B_{2j}Z_j + dW & B_{1j} & WC_j' + Z_j'D_{2j}' \\ \star & -rW & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{4.9}$$

$$T_{11} \triangleq A_jW + WA_j' + B_{2j}Z_j + Z_j'B_{2j}' + 2dW \tag{4.10}$$

então a lei de controle $u(t) = K_{\xi(t)}x(t)$, em que a função de chaveamento $\xi(t)$ seleciona o ganho ativo dentre o conjunto de ganhos $K_j = Z_jW^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$, estabiliza o sistema chaveado em malha fechada (2.101)-(2.103) com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$ para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária (função de Lyapunov quadrática, com $P = W^{-1}$), assegurando a cada subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ a alocação de pólos no círculo $\mathcal{C}_c$ especificado na Figura 2.1.

Prova: Fazendo $Z_j = K_jW$ e utilizando complemento de Schur, é possível representar a expressão (4.9) por

$$\begin{bmatrix} R_{11} & B_{1j} & W(C_j + D_{2j}K_j)' \\ \star & -\mathbf{I} & D_{1j}' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, N \tag{4.11}$$

com $R_{11} \triangleq (A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})W + W(A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})' + \big((A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})W(A_j + B_{2j}K_j + d\mathbf{I})'\big)/r$, que assegura que ambas (4.4) e (4.7) são verificadas. ∎

Comentários análogos ao Comentário 3.11 e aos comentários 4.1 a 4.5 são válidos aqui.

Os teoremas 4.1 a 4.4 podem ser usados para tratar o problema de controle sujeito a falhas de atuadores ([100], [101], [106]), conforme descreve o próximo corolário.

Corolário 4.1 *Suponha que as matrizes relacionadas com o controle tenham um número de colunas que pode variar em cada subsistema, isto é, $B_{2j} \in \mathbb{R}^{n\times m_j}$ e $D_{2j} \in \mathbb{R}^{p\times m_j}$, $j = 1, \ldots, N$ o que pode representar falhas totais em alguns dos atuadores do sistema. As condições dos teoremas 4.1 a 4.4 podem ser utilizadas para obter um conjunto de ganhos chaveados que estabiliza o sistema, incluindo restrições de alocação de pólos e de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$, bastando utilizar matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m_j\times n}$, $j = 1, \ldots, N$, com números distintos de linhas nas respectivas condições.*

O problema de alocação dos pólos de cada um dos subsistemas lineares do sistema chaveado em círculos distintos pode ser tratado através das condições dos teoremas 4.3 e 4.4, como é descrito no corolário a seguir.

Corolário 4.2 *As condições dos teoremas 4.3 e 4.4 podem ser utilizadas para alocações dos pólos de cada subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ em um círculo localizado no semiplano esquerdo do plano complexo com raio r_j e distando d_j do eixo imaginário, bastando substituir r por r_j e d por d_j nas respectivas condições. Observe que essa troca de variáveis não altera a validade das expressões (4.6) e (4.9)* *nem da expressão (4.8), que garante a estabilidade do sistema para qualquer seqüência de chaveamento. Utilizando r_j e d_j, $j = 1, \ldots, N$ nas condições dos teoremas 4.3 e 4.4 é possível impor alocações mais restritas (raios menores, com círculos mais distantes do eixo imaginário) para os subsistemas dos quais se deseja uma resposta mais rápida, menos oscilatória e mais amortecida.*

Como será ilustrado por meio de exemplos, estratégias de controle com ganhos chaveados permitem melhorar a resposta dinâmica do sistema chaveado em malha fechada. Além disso, em alguns casos, um controle chaveado pode assegurar a estabilidade em malha fechada para sistemas que não admitem um ganho fixo de realimentação de estados baseado na estabilidade quadrática.

Exemplo 4.1 Considere o sistema chaveado linear estudado em [75] (exemplo 1), que possui dois subsistemas dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.2 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Esse sistema não admite um ganho fixo estabilizante calculado pela estabilizabilidade quadrática do Lema 2.3. Utilizando os ganhos

$$K_{1s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{2s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

os subsistemas são individualmente estáveis, com autovalores $-0.10 \pm 1.41i$. Entretanto, o sistema chaveado em malha fechada torna-se instável quando inicializado em $x(0) = [1 \ \ 0]'$ e $\xi(0) = 1$ (isto é, partindo do subsistema 1), sofrendo comutações de um subsistema para o outro a cada 0.5 segundos, como ilustrado no plano de fase da Figura 4.1 (linha tracejada). Observe como um controlador chaveado que estabiliza de forma independente cada um dos subsistemas lineares pode não garantir a estabilidade do sistema chaveado em malha fechada. Por outro lado, a condição do Teorema 4.3 fornece ganhos chaveados que estabilizam quadraticamente o sistema. Por exemplo, escolhendo $d = 0$ e $r = 1$ como parâmetros do círculo de alocação $\mathcal{C}_c$, a condição (4.6) permite obter os ganhos

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2.102 & -1.369 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1.369 & 2.102 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

que alocam os pólos de ambos os subsistemas em $-0.78 \pm 0.53i$. Conforme descrito no Comentário 4.4, os ganhos chaveados calculados com a condição do Teorema 4.3 garantem a estabilidade do sistema em malha fechada para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária. A trajetória das variáveis de estado do sistema chaveado sujeito à lei de controle por realimentação de estados com os ganhos chaveados (4.15) é mostrada na Figura 4.1 (linha cheia), para as mesmas condições iniciais e a mesma seqüência de chaveamento utilizadas para a simulação da resposta do sistema com os ganhos (4.14). O comportamento dinâmico do sistema com ganhos chaveados computados pelo Teorema 4.3 é claramente melhor do que o obtido com ganhos chaveados que estabilizam cada subsistema de forma independente.

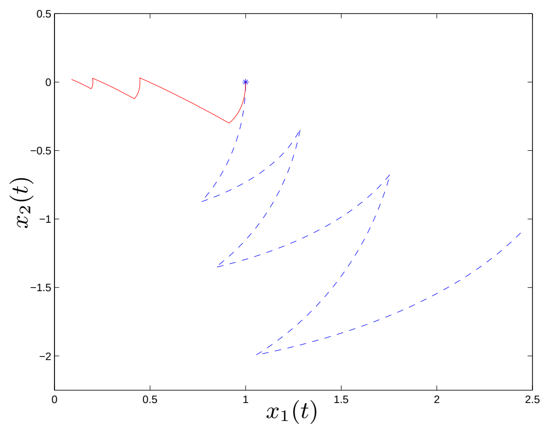

Figura 4.1: Plano de fase para o sistema chaveado linear (2.97) com subsistemas dados por (4.12)-(4.13) para o caso de controle com ganhos chaveados (4.14) que estabilizam os subsistemas individualmente (linha tracejada) e com os ganhos chaveados computados pela condição do Teorema 4.3 (linha cheia). As condições iniciais são $x(0) = [1 \quad 0]'$, $\xi(0) = 1$, havendo comutações entre os subsistemas a cada 0.5 segundos.

Exemplo 4.2 Seja um sistema chaveado linear com dois subsistemas gerados aleatoriamente dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Neste exemplo, o objetivo do projeto é alocar os pólos de ambos os subsistemas lineares em um círculo $\mathcal{C}_c$ com $d = 0.5$ e com o menor raio r possível. O menor raio obtido com a condição do Lema 2.13 é $r_f = 0.47$, sendo que a alocação e a estabilidade do sistema são garantidas pelo ganho fixo e pela matriz de Lyapunov dados respectivamente por

$$K_f = \begin{bmatrix} -0.957 & 2.582 \end{bmatrix}, \quad W_f = \begin{bmatrix} 334.591 & 818.346 \\ 818.346 & 2402.676 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Em contrapartida, o menor raio obtido com o Teorema 4.3 é $r_s = 0.26$, com ganhos chaveados estabilizantes e matriz de Lyapunov dados por

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.224 & 2.361 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.716 & 2.360 \end{bmatrix}, \quad W_s = \begin{bmatrix} 2.006 & 4.045 \\ 4.045 & 8.183 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Note que o uso de uma estratégia de controle de ganhos chaveados permite uma alocação de pólos mais restrita (raio menor, no caso), conforme mostrado na Figura 4.2, o que garante que as respostas transitórias devido às comutações de um subsistema para outro serão mais amortecidas e menos oscilatórias.

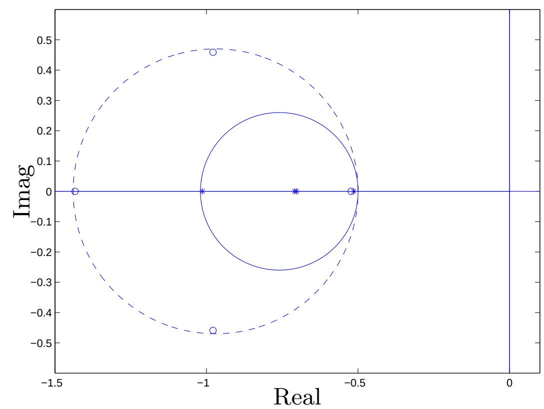

Figura 4.2: Alocação dos pólos dos subsistemas lineares (4.16)-(4.17) do sistema chaveado (2.97) para um controle por ganhos fixos calculados pelo Lema 2.13 (pólos em $\circ$, círculo de alocação com linha tracejada, $r_f = 0.47$) e para um controle por ganhos chaveados obtidos com o Teorema 4.3 (pólos em $*$, círculo de alocação com linha cheia, $r_s = 0.26$).

Exemplo 4.3 Considere o sistema chaveado linear com subsistemas gerados aleatoriamente dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D_{21} = D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{11} = B_{12} = \mathbf{I}_{3\times 3}; \quad D_{11} = D_{12} = \mathbf{0}_{2\times 3} \tag{4.22}$$

As condições do Lema 2.4 são factíveis, fornecendo o ganho fixo

$$K_f = \begin{bmatrix} 0.151 & 1.292 & -0.440 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

que assegura a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma_f = 22.790$. As condições do Teorema 4.2 também garantem a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada através dos ganhos chaveados

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.748 & 2.741 & 2.656 \end{bmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.660 & 1.092 & -4.095 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma_s = 1.016$, o que representa uma significativa melhora no índice de desempenho do sistema, obtida ao preço de se implementar uma estratégia de controle baseada em ganhos chaveados.

O próximo exemplo explora o uso das condições dos corolários 4.1 e 4.2 para tratar os problemas de falhas de atuadores e de alocações de pólos em círculos distintos aplicados a um modelo de sistema físico.

Exemplo 4.4 Considere o controle de um processo de lama ativada com três fases distintas, analisado em [54]. As quatro variáveis de estado representam as concentrações de: $x_1(t)$ - substrato biodegradável rapidamente (em inglês, *readily biodegradable substrate*), $x_2(t)$ - nitrato, $x_3(t)$ - amônia e $x_4(t)$ - oxigênio dissolvido na lama. O subsistema 1 representa a fase aeróbica, 2 é uma fase intermediária entre 1 e 3, que é a fase anóxica. Na fase aeróbica, o controle do processo é feito por duas variáveis manipuladas: $u_1(t)$ - a taxa de fluxo de entrada de concentração de carbono (em inglês, *inlet flow rate of carbon concentration*) e $u_2(t)$ - a taxa de fluxo de entrada de ar (em inglês, *inlet flow rate of air)*. Nas fases 2 e 3, somente a variável $u_1(t)$ está disponível para o controle. A comutação de uma fase para outra é feita por um operador, em função da remoção total do substrato principal, numa seqüência não conhecida *a priori*, mas disponível em tempo real. Para maiores detalhes sobre o modelo, consulte [54]. As matrizes do sistema são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -100.863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.160 & 5.430 & 0 \\ -5.488 & 0 & -6.590 & 0 \\ -35.893 & 0 & -24.815 & -115.160 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -100.863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.160 & 5.430 & 0 \\ -5.488 & 0 & -6.590 & 0 \\ -35.893 & 0 & -24.815 & -1.160 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -74.597 & -39.034 & 0 & 0 \\ -9.244 & -8.050 & 0 & 0 \\ -4.042 & -3.013 & -1.160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20.160 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 1.143 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 9.500 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = B_{23} = \begin{bmatrix} 1.143 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{13} = \begin{bmatrix} 0.083 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.333 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad , \quad C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D_{22} = D_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

$$D_{11} = D_{12} = D_{13} = \mathbf{0}_{2\times 2} \tag{4.32}$$

As alocações de pólos escolhidas para cada subsistema são $(d_1 = 7, r_1 = 10)$ $(j = 1)$, $(d_2 = 0, r_2 = 15)$ $(j = 2)$ e $(d_3 = 0, r_3 = 30)$ $(j = 3)$, o que representa um comportamento dinâmico mais restrito para o subsistema 1 quando comparado à situação de uma única entrada de controle (subsistemas 2 e 3). Os ganhos chaveados obtidos através das condições do Teorema 4.4 são dados por

$$K_1 = \begin{bmatrix} 59.022 & 50.511 & 44.388 & -0.029 \\ 3.834 & -0.442 & 2.207 & 10.300 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 62.494 & 38.833 & 37.626 & 0.476 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.798 & 131.451 & 93.047 & 1.054 \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

com a matriz de Lyapunov

$$W = \begin{bmatrix} 0.362 & -0.021 & 0.146 & 0.608 \\ -0.021 & 0.100 & -0.129 & -0.248 \\ 0.146 & -0.129 & 0.217 & 0.478 \\ 0.608 & -0.248 & 0.478 & 8.814 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

assegurando a estabilidade do sistema chaveado em malha fechada com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = 104.157$. A Figura 4.3 mostra as alocações de pólos para os três subsistemas.

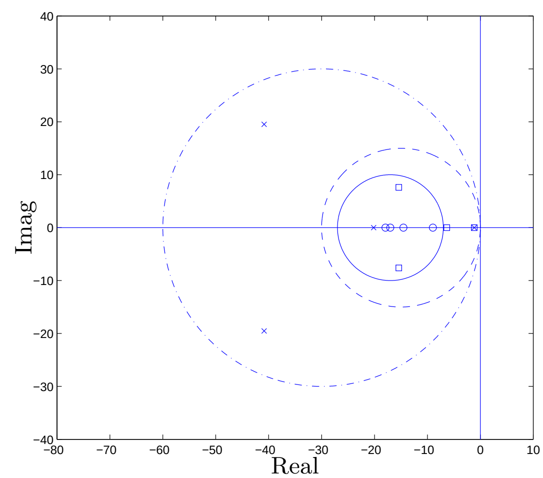

Figura 4.3: Alocação dos pólos de cada um dos subsistemas lineares $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, 2, 3$. Subsistema 1: pólos em $\circ$, círculo de alocação em linha contínua com $(d_1 = 7, r_1 = 10)$; subsistema 2: pólos em $\square$, círculo de alocação em linha tracejada com $(d_2 = 0, r_2 = 15)$; subsistema 3: pólos em $\times$, círculo de alocação em linha tracejado-pontilhada com $(d_3 = 0, r_3 = 30)$.

4.2 Caso discreto no tempo

4.2.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$

A condição mencionada no Corolário 3.4 pode ser diretamente aplicada na solução do Problema 2.13 de cômputo de ganhos robustos que asseguram a estabilidade do sistema em malha fechada com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ.

Uma solução LMI para o Problema 2.14 de controle $\mathcal{H}_\infty$ através de ganhos chaveados é dada pelo próximo teorema.

Teorema 4.5 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $F_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1,\ldots,N$ tais que o problema de otimização*

$$\min \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j' - S_j & \mathbf{0} & G_j'A_j' + F_j'B_{2j}' & G_j'C_j' + F_j'D_{2j}' \\ \star & \mathbf{I} & B_{1j}' & D_{1j}' \\ \star & \star & S_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \qquad (4.37)$$
$$i = 1,\ldots,N \ , \ j = 1,\ldots,N$$

tenha solução, então a lei de controle $u(k) = K_{\xi(k)}x(k)$, em que a função de chaveamento $\xi(k)$ seleciona arbitrariamente o ganho ativo dentre o conjunto de ganhos $K_j = F_jG_j^{-1}$, $j = 1,\ldots,N$, estabiliza o sistema chaveado linear em malha fechada (2.121)-(2.123) para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$. A matriz da função de Lyapunov é selecionada por $\xi(k)$ dentre o conjunto de matrizes S_j, $j = 1,\ldots,N$.

Prova: A prova é direta. Substitua A_j por $A_j + B_{2j}K_j$, C_j por $C_j + D_{2j}K_j$ em (2.69) e faça a transformação de variáveis $K_jG_j = F_j$ para recuperar a condição (4.37). ∎

Comentários análogos aos comentários 2.18 e 2.20 são válidos aqui.

Comentário 4.6 A condição do Teorema 4.5 pode ser vista como uma extensão da condição mencionada no Comentário 2.14 ([78]) para tratar o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ ou como uma extensão da condição do Lema 2.12 ([25]) para tratar o caso em que as matrizes $B_2(\alpha(k))$ e $D_2(\alpha(k))$ são matrizes chaveadas. O apelo principal da condição (4.37) é a possibilidade de calcular através de LMIs um controlador $\mathcal{H}_\infty$ chaveado para o caso geral em que todas as matrizes do sistema são supostas chaveadas.

4.2.2 Alocação de pólos

O teorema a seguir apresenta uma condição convexa na forma de LMIs para resolver o Problema 2.15 de estabilização com alocação de pólos.

Teorema 4.6 *Dados $| c |\leq 1$, $r > 0$ tais que $| c | + r \leq 1$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = 1,\ldots,N$ tais que*

$$\begin{bmatrix} r(G_j + G_j' - S_j) & G_j'A_j' + F_j'B_{2j}' - cG_j' \\ \star & rS_i \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,N \ , \ j = 1,\ldots,N \qquad (4.38)$$

então a lei de controle $u(k) = K_{\xi(k)}x(k)$, em que a função de chaveamento $\xi(k)$ seleciona arbitrariamente o ganho ativo dentre o conjunto de ganhos $K_j = F_jG_j^{-1}$, $j = 1,\ldots,N$, estabiliza o sistema chaveado linear em malha fechada (2.118)-(2.119) para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária, assegurando *a qualquer subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ a alocação de pólos no círculo $\mathcal{C}_d$, com centro c e raio r, mostrado na Figura 2.2. A matriz da função de Lyapunov é selecionada por $\xi(k)$ dentre o conjunto de matrizes S_j, $j = 1, \ldots, N$.*

Prova: Considerando a transformação de variáveis $F_j = K_jG_j$, a expressão (4.38) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} G_j + G_j' - S_j & G_j'\big(A_j + B_{2j}K_j - c\mathbf{I}\big)'/r \\ \star & S_i \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{4.39}$$

que é equivalente à desigualdade (2.58), substituindo A_j por $\big(A_j + B_{2j}K_j - c\mathbf{I}\big)'/r$. A factibilidade de (2.58) garante que os autovalores de A_j, $j = 1, \ldots, N$ estão contidos no círculo de raio unitário centrado na origem do plano complexo, que é uma condição necessária à estabilidade de sistemas chaveados com funções de chaveamento arbitrárias. A existência de solução para (4.39) garante que os autovalores de $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ estão localizados dentro do círculo com centro c e raio r adequadamente escolhidos para que esse círculo esteja contido no círculo de raio unitário. A estabilidade do sistema para seqüências de chaveamentos arbitrárias também é garantida pela existência de uma solução para a condição do Teorema 4.6. Observe que o sistema

$$x(k+1) = \Big(\frac{A_j + B_{2j}K_j - c\mathbf{I}}{r}\Big)x(k) \tag{4.40}$$

com $K_j = F_jG_j^{-1}$ obtido de (4.38) descreve um sistema estável para qualquer seqüência de chaveamento. O sistema (4.40) pode ser reescrito como a soma de dois sistemas lineares

$$x(k+1) + (r-1)x(k+1) = (A_j + B_{2j}K_j)x(k) - cx(k) \tag{4.41}$$

Note que a parcela $(r-1)x(k+1) = -cx(k)$ é sempre estável pois, para o círculo $\mathcal{C}_d$ estar contido no círculo de raio unitário, tem-se $\mid c \mid + \, r \leq 1$, implicando que $-1 \leq c/(1-r) \leq 1$. A estabilidade do sistema (4.41) para qualquer seqüência de chaveamento exige que a parcela $x(k+1) = (A_j + B_{2j}K_j)x(k)$ também seja estável. Portanto, o ganho K_j que assegura a alocação de pólos para cada subsistema linear também garante a estabilidade do sistema chaveado. ∎

Os próximos comentários descrevem particularizações da condição do Teorema 4.6 para tratar controle com ganho robusto e controle com ganhos chaveados que asseguram propriedades de alocação de pólos.

Comentário 4.7 Fazendo $G_j = G_j' = S_j = S_i = S$ e $F_j = F$, $j = 1, \ldots, N$ em (4.38), pode-se computar um ganho robusto $K = FS^{-1}$, que garante as propriedades de alocação de pólos e de estabilidade do sistema em malha fechada para seqüências de chaveamento arbitrárias descritas no Teorema 4.6, com uma matriz de Lyapunov quadrática S. Observe que, para $c = 0$ e $r = 1$, recupera-se a condição de estabilizabilidade quadrática do Lema 2.9.

Comentário 4.8 Fazendo $G_j = G_j' = G$ e $F_j = F$, $j = 1, \ldots, N$ em (4.38), pode-se computar um ganho robusto $K = FG^{-1}$, que garante as propriedades de alocação de pólos e de estabilidade do sistema em malha fechada para seqüências de chaveamento arbitrárias descritas no Teorema 4.6, sendo que a função de chaveamento $\xi(k)$ seleciona a matriz de Lyapunov dentre o conjunto de matrizes S_j, $j = 1, \ldots, N$.

Comentário 4.9 Fazendo $G_j = G_j' = S_j$ $j = 1, \ldots, N$ em (4.38), tem-se uma condição para cômputo de ganhos chaveados $K_j = F_j S_j^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$ que garantem as propriedades de alocação de pólos e de estabilidade do sistema em malha fechada para seqüências de chaveamento arbitrárias descritas no Teorema 4.6, sendo que a função de chaveamento $\xi(k)$ seleciona a matriz de Lyapunov dentre o conjunto de matrizes S_j, $j = 1, \ldots, N$.

No que diz respeito a cômputo de ganhos fixos, a utilização da condição (4.38) com as particularizações descritas no Comentário 4.8 fornece resultados menos conservadores do que a implementação de (4.38) sob as particularizações do Comentário 4.7, graças às matrizes extras G. No caso de cômputo de ganhos chaveados com restrições de estrutura, o uso da condição (4.38) sem as particularizações do Comentário 4.9 leva a melhores resultados de síntese ao preço de se resolver LMIs com maior número de variáveis.

Quando se sabe *a priori* que nem todas as transições entre subsistemas são realizáveis, é possível reduzir o número de LMIs a serem resolvidas no Teorema 4.6, conforme descreve o Comentário 2.18. Note também que os corolários 4.1 e 4.2 podem ser aplicados com o Teorema 4.6.

Uma condição LMI para solução do Problema 2.16 de controle $\mathcal{H}_\infty$ com restrições de alocação de pólos é dada no teorema a seguir.

Teorema 4.7 *Dados $\mid c \mid \leq 1$, $r > 0$ tais que $\mid c \mid + r \leq 1$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $F_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j = 1, \ldots, N$ tais que o problema de otimização*

$$\min \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} r(G_j + G_j' - S_j) & \mathbf{0} & G_j'A_j' + F_j'B_{2j}' - cG_j' & r(G_j'C_j' + F_j'D_{2j}') \\ \star & r\mathbf{I} & rB_{1j}' & rD_{1j}' \\ \star & \star & rS_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mu r\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \qquad (4.42)$$
$$i = 1, \ldots, N \ , \ j = 1, \ldots, N$$

tenha solução, então a lei de controle $u(k) = K_{\xi(k)}x(k)$, em que a função de chaveamento $\xi(k)$ seleciona arbitrariamente o ganho ativo dentre o conjunto de ganhos $K_j = F_j G_j^{-1}$, $j = 1, \ldots, N$, estabiliza o sistema chaveado linear em malha fechada (2.121)-(2.123) para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = \sqrt{\mu^*}$, $\mu^* = \min \mu$, assegurando a qualquer subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ a alocação de pólos no círculo $\mathcal{C}_d$, com centro em c e raio r, mostrado na

Figura 2.2. A matriz de Lyapunov é selecionada por $\xi(k)$ dentre o conjunto de matrizes S_j, $j = 1, \ldots, N$.

Prova: Substitua A_j por $\big(A_j - c\mathbf{I}\big)/r$ e B_{2j} por B_{2j}/r na condição do Teorema 4.5 para obter (4.42), cuja factibilidade assegura a alocação de pólos com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada. Idéias similares às da prova do Teorema 4.6 asseguram que se (4.42) tem solução, então o sistema é estável para qualquer seqüência de chaveamento arbitrária. ∎

Comentários análogos aos comentários 2.18 e 4.7 a 4.9 e condições análogas às dos Corolários 4.1 e 4.2 são válidas aqui.

Na seqüência, alguns exemplos ilustram a aplicação das condições dos teoremas 4.5 a 4.7.

Exemplo 4.5 Considere um sistema chaveado linear discreto no tempo com três subsistemas gerados aleatoriamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7582 & 0.6802 \\ -0.6919 & -1.0725 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0.6234 \\ 0.6859 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.8998 & 0.2847 \\ -2.1231 & -0.7333 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0.6773 \\ 0.8768 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.7734 & -0.3368 \\ 0.1518 & 0.9708 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{23} = \begin{bmatrix} 0.0129 \\ 0.3104 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

Embora as matrizes A_1, A_2 e A_3 sejam estáveis, este sistema não é quadraticamente estabilizável por meio de ganhos fixos calculados pela condição do Lema 2.9. Por outro lado, aplicando a condição do Teorema 4.6 com matrizes $G_j = G_j' = G$ e $F_j = F$ fixas, matrizes S_j chaveadas e com $c = 0$ e $r = 1$ obtém-se a solução

$$G = \begin{bmatrix} 48.9397 & -42.0100 \\ -43.4477 & 119.8579 \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 21.1029 & -25.4457 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

que permite calcular o ganho robusto estabilizante

$$K = FG^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3524 & -0.0888 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

Note, nesse caso, como o uso de uma função de Lyapunov com matrizes chaveadas (Teorema 4.6 com particularizações do Comentário 4.8) permite obter um ganho robusto estabilizante para o sistema enquanto a condição baseada em uma função de Lyapunov com matriz fixa (Lema 2.9) não é factível.

Utilizando a condição do Teorema 4.6 sem particularizações nas matrizes G_j, F_j e S_j, é possível estabilizar o sistema em questão impondo alocações de pólos mais restritivas, como por exemplo a alocação com $c = 0$ e $r = 0.52$, assegurada pelos ganhos chaveados

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.3138 & -0.0144 \end{bmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0.3413 & 0.1392 \end{bmatrix} \quad , \quad K_3 = \begin{bmatrix} 3.2388 & -1.3244 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

obtidos da solução de (4.38). Observe que a alocação de pólos mais restritiva ($c = 0$, $r = 0.52$), obtida com a estratégia de ganhos chaveados, permite melhorar a resposta transitória do sistema em relação à resposta relacionada com a alocação em ($c = 0$, $r = 1$), obtida através da estratégia de ganhos fixos, ao preço de se implementar uma estratégia de controle mais complexa.

Exemplo 4.6 Considere um sistema chaveado linear discreto no tempo com subsistemas

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 \\ -2.50 & -1.00 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.00 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 \\ 0.11 & 1.00 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

Este sistema possui matrizes instáveis A_1 e A_2 (autovalores iguais a $-0.50 \pm 1.50i$ e -0.10, 1.10, respectivamente). Não é possível encontrar um ganho fixo estabilizante (alocação com $c = 0$ e $r = 1$) através da condição do Teorema 4.6 com as restrições nas variáveis do problema dadas pelos comentários 4.7 e 4.8. Por outro lado, a condição (4.38) do Teorema 4.6 (com matrizes G_j, F_j, S_j, $j = 1, \ldots, N$) é factível, permitindo por exemplo a alocação dos pólos dos subsistemas (4.49)-(4.50) no círculo com centro $c = 0.5$ e raio $r = 0.5$ por meio dos ganhos chaveados

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2.025 & 2.450 \end{bmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0.661 & -1.132 \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

A resposta temporal do sistema em malha fechada é mostrada na Figura 4.4. O símbolo $(\cdot)$ indica as trajetórias das variáveis de estado $x_1(k)$ e $x_2(k)$, sendo $x(0) = [1 \ \ -1]'$, para o caso de operação no subsistema $A_1 + B_{21}K_1$ enquanto o símbolo $(*)$ indica o mesmo para operação no subsistema $A_2 + B_{22}K_2$. As linhas cheias indicam as trajetórias das variáveis de estado quando o sistema é inicializado no subsistema $j = 1$ e sofre comutações entre os subsistemas $(1 \rightleftharpoons 2)$ a cada período de amostragem.

Uma estratégia bem conhecida para controle de sistemas discretos no tempo é tentar obter um transitório rápido utilizando um controlador do tipo *deadbeat*. Para o presente exemplo, uma resposta quase *deadbeat* é obtida fixando o centro do círculo de alocação de pólos em $c = 0$ e reduzindo o raio até um valor mínimo, dado por $r = 0.15$ pela condição do Teorema 4.6. Os ganhos chaveados

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2.500 & 0.994 \end{bmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.104 & -1.000 \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

fornecidos por (4.38) garantem a especificação de alocação de pólos e também a estabilidade do sistema para seqüências de chaveamento arbitrárias. A Figura 4.5 mostra a resposta temporal (quase *deadbeat*) para o sistema em questão com os ganhos chaveados (4.52) no caso de uma operação iniciada no subsistema 1, com $x(0) = [1 \ -1]'$, e com transições entre subsistemas ocorrendo a cada instante de amostragem (um segurador de ordem zero foi incluído na simulação).

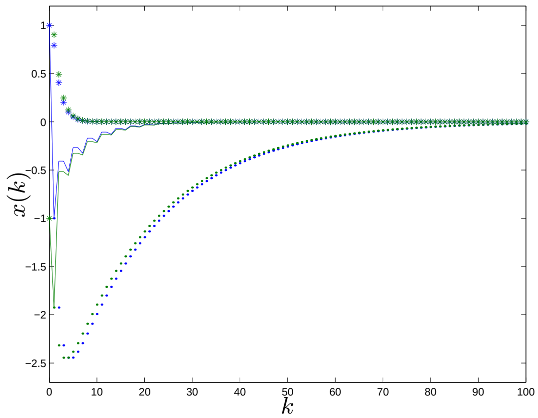

Figura 4.4: Trajetórias das variáveis de estado para o sistema chaveado linear discreto no tempo com subsistemas (4.49)-(4.50), controlado pelos ganhos chaveados (4.51). O símbolo $(\cdot)$ indica as trajetórias dos estados $x_1(k)$ e $x_2(k)$, sendo $x(0) = [1 \;\; -1]'$, para o caso de operação no subsistema $A_1 + B_{21}K_1$ enquanto o símbolo $(*)$ indica o mesmo para operação no subsistema $A_2 + B_{22}K_2$. As trajetórias das variáveis de estado do sistema sofrendo chaveamentos entre subsistemas a cada período de amostragem são representadas pelas linhas cheias.

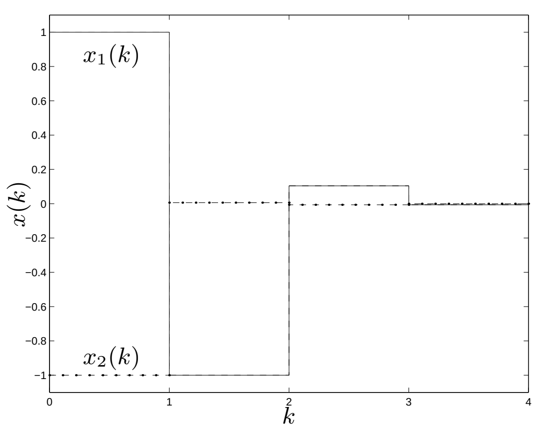

Figura 4.5: Trajetórias das variáveis de estado $x_1(k)$ (linha cheia), $x_2(k)$ (linha tracejado-pontilhada) para o sistema chaveado com subsistemas lineares (4.49)-(4.50) controlado pelos ganhos chaveados (4.52) (resposta quase *deadbeat*: $c = 0$, $r = 0.15$).

Exemplo 4.7 Seja um sistema chaveado linear discreto no tempo com subsistemas gerados aleatoriamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5960 & 0.0336 \\ 0.7818 & 0.8570 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0.4720 \\ 0.0881 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.6826 & 0.9177 \\ 0.8019 & 0.3881 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0.9251 \\ 0.6785 \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

É possível computar ganhos fixos estabilizantes para o sistema através da condição do Teorema 4.6 ($c = 0$, $r = 1$) com as particularizações dos comentários 4.7 e 4.8. No entanto, se a restrição de estrutura

$$K_j = \begin{bmatrix} k_{11}^j & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad j = 1, 2 \tag{4.55}$$

for imposta, significando que somente $x_1(k)$ está disponível para a síntese do sinal de controle $u(k)$, então apenas a condição (4.38) sem particularizações nas variáveis G_j, F_j, S_j é capaz de computar ganhos estabilizantes ($c = 0$, $r = 1$) para o sistema, dados por

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.3439 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.8736 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

Fixando o centro do círculo de alocação de pólos em $c = 0$, a condição (4.38) permite reduzir o raio até um raio mínimo $r = 0.93$, sendo que nesse caso a alocação é garantida por meio dos ganhos

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3.0085 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.7989 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

Exemplo 4.8 Considere um sistema chaveado linear discreto no tempo com dois subsistemas

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.254 & 0.271 & 0.631 \\ 0.307 & 0.749 & 0.417 \\ 0.487 & 0.430 & 0.723 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0.054 & 0.442 \\ 0.544 & 0.925 \\ 0.670 & 0.756 \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.567 & 0.642 & 0.762 \\ 0.776 & 0.518 & 0.654 \\ 0.810 & 0.494 & 0.267 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0.188 & 0.342 \\ 0.106 & 0.149 \\ 0.996 & 0.588 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

com variáveis de estado $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$ e entradas de controle $u_1(k)$, $u_2(k)$.

O objetivo é controlar o sistema com ganhos chaveados sujeitos à restrição de estrutura do tipo bloco diagonal

$$K_j = \begin{bmatrix} k_{11}^j & k_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & k_{23}^j \end{bmatrix} \quad , \quad j = 1, 2 \tag{4.60}$$

A condição do Teorema 4.6 é factível para $c = 0$, $r = 1$, fornecendo os ganhos estabilizantes

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.7399 & -0.9974 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8000 \end{bmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1.1511 & -0.8375 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3356 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

Também é possível impor uma alocação de pólos mais restrita ($c = 0$ e $r = 0.76$) através de (4.38), assegurando ao sistema em malha fechada uma resposta transitória mais rápida por meio dos ganhos

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.8482 & -1.2237 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8284 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1.8575 & -1.4650 & 0 \\ 0 & 0 & -1.7335 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

O exemplo a seguir apresenta um sistema do tipo fonte ininterrupta de energia (do inglês, *Uninterruptible Power Supply* – UPS) com uma carga chaveada típica, que é uma aplicação importante na área de eletrônica de potência. O sistema é modelado como um sistema chaveado linear e as condições dos teoremas 4.6 e 4.7 são utilizadas para projetar controladores que garantam a estabilidade com restrições de alocação de pólos e de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

Exemplo 4.9 Considere o sistema UPS monofásico [65], cujo circuito é mostrado na Figura 4.6.

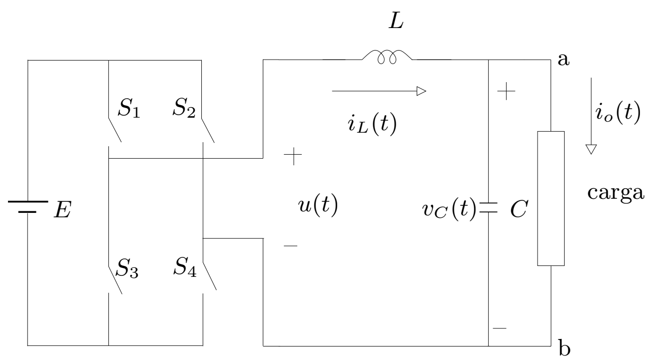

Figura 4.6: Topologia básica de um sistema UPS monofásico.

Uma característica fundamental de um sistema UPS é a capacidade de garantir uma tensão senoidal de saída com um baixo nível de distorção inclusive na presença de cargas não-lineares, como retificadores com filtros capacitivos. Muitas técnicas têm sido aplicadas para tratar o problema de controle do circuito da Figura 4.6, sendo que controladores a tempo discreto têm merecido uma atenção especial, principalmente pela possibilidade de implementação de estratégias sofisticadas de controle em processadores digitais de baixo custo. Por exemplo, um controle do tipo *deadbeat* foi aplicado a sistemas UPS em [53], [77] e um controle do tipo preditivo foi utilizado em [20]. Controladores repetitivos, cujo objetivo é eliminar erros causados por distúrbios periódicos produzidos por cargas cíclicas (comutações periódicas), têm sido bastante utilizados para melhorar a resposta em regime permanente de sistemas UPS [57], [79], [112].

O objetivo aqui é usar as condições de estabilização com alocação de pólos e com especificação de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, dadas pelos teoremas 4.6 e 4.7, para determinar os ganhos de controladores por realimentação de estados que garantam ao sistema UPS em malha fechada uma tensão de saída senoidal com baixo nível de distorção e uma rápida resposta transitória quando uma carga chaveada típica é alimentada. A carga considerada é um retificador com filtro capacitivo, mostrado na Figura 4.7.

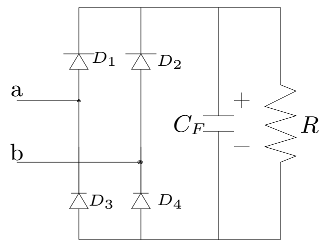

Figura 4.7: Retificador em ponte completa com filtro capacitivo aplicado como carga do sistema UPS mostrado na Figura 4.6.

Os diodos $D_1, \ldots, D_4$ e as chaves $S_1, \ldots, S_4$ são supostos ideais. Quando o retificador da Figura 4.7 substitui a carga genérica da Figura 4.6, dois modos de operação são possíveis. Escolhendo como variáveis de estado $x_c(t) = [v_C(t) \;\; i_L(t)]'$ e usando as leis de Kirchhoff, o sistema UPS pode ser modelado como um sistema chaveado linear (2.97). Quando os diodos $D_1, \ldots, D_4$ não estão em condução, as matrizes do sistema são dadas por

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

e no caso em que D_1, D_4 ou D_2, D_3 estão em condução, as matrizes são dadas por

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} -1/(R(C+C_F)) & 1/(C+C_F) \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

Observe que a variável de estado $v_{C_F}(t)$, tensão no capacitor do retificador, não é controlável pela entrada $u(t)$ quando os diodos $D_1, \ldots, D_4$ não estão em condução. Entretanto, cabe lembrar que o objetivo aqui é controlar a qualidade da tensão $v_C(t)$ fornecida à carga pela UPS e não o controle da tensão $v_{C_F}(t)$ (variável interna da carga). Para realizar esse objetivo, supõe-se que as variáveis disponíveis para realimentação são $v_C(t)$ e $i_L(t)$ (variáveis do sistema UPS).

A fim de aplicar um esquema de controle a tempo discreto, o sistema é discretizado utilizando o método do segurador de ordem zero, com um período de amostragem T_s, sendo representado por

$$x_d(k+1) = A_{d\xi(k)} x(k) + B_{d\xi(k)} u(k) \tag{4.65}$$

com

$$x_d(k+1) = [v_C(k) \;\; i_L(k)]' \tag{4.66}$$

e

$$A_{dj} = \exp(A_{cj} T_s) \quad , \quad B_{dj} = (\exp(A_{cj} T_s) - \mathbf{I}) {A_{cj}}^{-1} B_{cj} \quad , \quad j = 1, 2 \tag{4.67}$$

Definindo o erro de trajetória $e(k)$ como

$$e(k) = r(k) - v_C(k) \tag{4.68}$$

sendo $r(k)$ um sinal de referência senoidal, tem-se que uma ação integral sobre o erro de trajetória é dada por

$$e_i(k+1) = e_i(k) + e(k) \tag{4.69}$$

que é incorporada ao sistema (4.65) para melhorar a resposta em regime permanente. O sistema aumentado, com variáveis de estado $x(k)' = [v_C(k)\ i_L(k)\ e_i(k)] = [x_1(k)\ x_2(k)\ x_3(k)]$ é dado por

$$x(k+1) = A_{\xi(k)}x(k) + B_{2\xi(k)}u(k) + B_r r(k) \tag{4.70}$$

com $\xi(k) : \mathbb{N} \to \{1,2\}$ e

$$A_j = \begin{bmatrix} A_{dj} & \mathbf{0} \\ H & 1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix},\ B_{2j} = \begin{bmatrix} B_{dj} \\ 0 \end{bmatrix},\ B_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix},\ j = 1,2 \tag{4.71}$$

Considere os seguintes parâmetros nominais do sistema UPS: tensão eficaz (do inglês, *Root Mean Square* – RMS) de saída igual a 110 V, 60 Hz, tensão de entrada E igual a $250V$, freqüências de amostragem e chaveamento iguais a 10800 Hz, o que define o período de amostragem $T_s = 1/10800\ s$. O indutor do filtro de saída tem indutância L igual a $1mH$, o capacitor do filtro de saída tem capacitância C igual a 100μF e os parâmetros da carga da Figura 4.7 são R igual a 24Ω e C_F igual a $330\mu F$. Com esses parâmetros, as matrizes $(A, B_2)_j$, $j = 1,2$ em (4.71), são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9574 & 0.9128 & 0 \\ -0.0913 & 0.9574 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ B_{21} = \begin{bmatrix} 0.0426 \\ 0.0913 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

para o caso em que $D_1, \ldots, D_4$ não estão em condução e por

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.9812 & 0.2137 & 0 \\ -0.0919 & 0.9901 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ B_{22} = \begin{bmatrix} 0.0099 \\ 0.0923 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

para o caso em que D_1, D_4 ou D_2, D_3 estão em condução.

Simulações numéricas apresentadas na seqüência mostram que o sistema UPS tem um bom desempenho com controlador com ganho fixo, mas que o desempenho pode ser melhorado significativamente utilizando uma estratégia de controle de ganhos chaveados.

Utilizando a condição do Teorema 4.6 com as particularizações do Comentário 4.8 é possível garantir uma alocação dos pólos dos dois subsistemas em $c = 0$, $r = 0.9$ através do ganho fixo

$$K = \begin{bmatrix} -27.3715 & -17.5037 & 5.1237 \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

A tensão $v_C(t)$ na saída da UPS e a corrente $i_o(t)$ na entrada da carga são mostradas na Figura 4.8, para o caso do sistema controlado por $u(k) = Kx(k)$, com ganho fixo K dado por (4.74). O sinal $u(k)$ é convertido em um sinal com modulação por largura de pulso (do inglês, *Pulsewidth Modulation* – PWM) para ser aplicado ao sistema, como seria feito em uma aplicação prática da técnica, e as variáveis mostradas na simulação são contínuas no tempo. Quando a corrente de carga $i_o(t)$ é igual a zero, o subsistema $j = 1$ está ativo (descarga do capacitor C_F) e quando $i_o(t) \neq 0$, o subsistema $j = 2$ está ativo (carga do capacitor C_F).

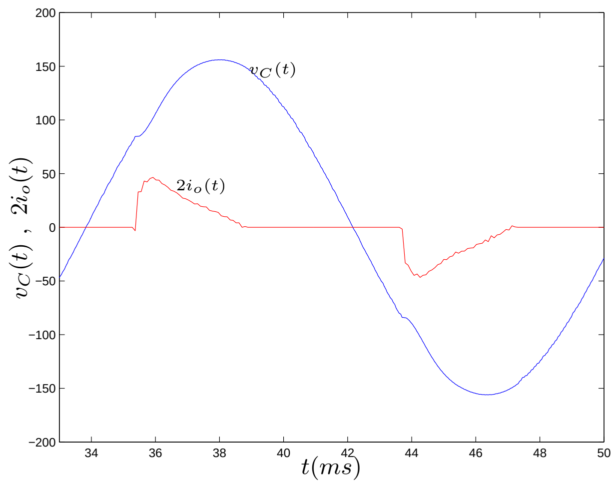

Figura 4.8: Tensão de saída $v_C(t)$ e corrente de carga $2i_o(t)$ do sistema UPS da Figura 4.6 com a carga da Figura 4.7 controlado pelo ganho fixo (4.74).

A taxa de distorção harmônica (do inglês, *Total Harmonic Distortion* – THD) da forma de onda da tensão de saída da Figura 4.8 é de 3.08%, causada pela presença da carga chaveada. O desempenho do sistema pode ser melhorado utilizando ganhos chaveados computados através do Teorema 4.6. É possível restringir a alocação de pólos para $c = 0$ e $r = 0.5$, sendo que a condição (4.38) ainda é factível, fornecendo os ganhos

$$K_1 = \begin{bmatrix} -27.2512 & -19.3967 & 9.1495 \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -73.4297 & -16.1507 & 24.2970 \end{bmatrix} \tag{4.76}$$

A tensão de saída da UPS $v_C(t)$ e a corrente de carga $i_o(t)$ são mostradas na Figura 4.9, na qual a forma de onda senoidal apresenta uma melhor qualidade (THD de 0.67%) do que a forma de onda senoidal da Figura 4.8, graças ao uso de uma estratégia de controle com ganhos chaveados.

Restrições estruturais nos ganhos do controlador podem também ser aplicadas a esse problema. Por exemplo, suponha que a variável de estado $x_2(t)$, a corrente no indutor, não está disponível para realimentação, o que torna a ação de controle dependente apenas de um sensor de tensão para $x_1(t)$, resultando nos elementos dos ganhos $K_1(1,2)$ e $K_2(1,2)$ iguais a zero. Esse é um problema de projeto de controle de realimentação de saída (apenas $x_1(k)$ e $e_i(k)$ são usados para realimentação), que pode ser resolvido impondo as restrições de estrutura descritas no Corolário 3.2 às matrizes F_j e G_j, $j = 1, 2$ do Teorema 4.6. Utilizando as condições do Teorema 4.6, é possível garantir a alocação de pólos no círculo de centro $c = 0$

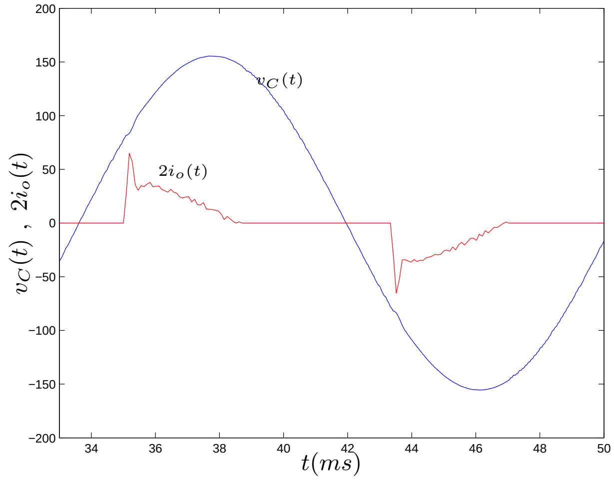

Figura 4.9: Tensão de saída $v_C(t)$ e corrente de carga $2i_o(t)$ do sistema UPS da Figura 4.6 com a carga da Figura 4.7 e ganhos chaveados (4.75)-(4.76).

e raio $r = 1$ por meio dos ganhos

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.2675 & 0 & 0.0044 \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.8219 & 0 & 0.0011 \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

com a estabilidade do sistema UPS em malha fechada assegurada para qualquer seqüência de chaveamento. Não é possível obter ganhos fixos através do Teorema 4.6 com essa restrição de estrutura. Nota-se que a indisponibilidade de uma das variáveis de estado para realimentação torna a ação de controle menos eficiente, levando a uma especificação de projeto mais conservadora.

Suponha agora que o sistema está sujeito à ação de perturbações do tipo sinal de energia, o que permite a representação do sistema aumentado no caso discreto

$$x(k+1) = A_{\xi(k)}x(k) + B_{1\xi(k)}w(k) + B_{2\xi(k)}u(k) + B_r r(k) \tag{4.79}$$

$$z(k) = C_{\xi(k)}x(k) + D_{1\xi(k)}w(k) + D_{2\xi(k)}u(k) \tag{4.80}$$

com

$$A_j = \begin{bmatrix} A_{dj} & \mathbf{0} \\ H & 1 \end{bmatrix} \ , \ \ H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

$$B_{1j} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \ , \ B_{2j} = \begin{bmatrix} B_{dj} \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \ , \ \ j = 1, 2 \tag{4.82}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ D_{1j} = \begin{bmatrix} d_{11} \end{bmatrix} \ , \ D_{2j} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \ , \ j = 1, 2 \tag{4.83}$$

Considere as seguintes matrizes para o problema

$$B_{11} = B_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.0 \end{bmatrix} \ , \ C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ D_{11} = D_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix} \ , \ D_{21} = D_{22} = 0 \tag{4.84}$$

Utilizando a condição de alocação de pólos e restrição de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do Teorema 4.7, é possível estabilizar o sistema UPS sujeito à perturbação $w(k)$. Escolhendo $c = 0$, $r = 0.6$, a condição do Teorema 4.7 é factível, assegurando a estabilidade do sistema UPS em malha fechada por meio de ganhos chaveados de realimentação de estados dados por

$$K_1 = \begin{bmatrix} -27.1120 & -19.5028 & 8.5565 \end{bmatrix}, \; K_2 = \begin{bmatrix} -74.2952 & -16.3124 & 23.0583 \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por $\gamma = 0.7578$.

É interessante observar que o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado pelo Teorema 4.7 depende da especificação de alocação de pólos. Por exemplo, escolhendo $c = 0$, o valor de γ em função do raio r do círculo de alocação é mostrado na Figura 4.10.

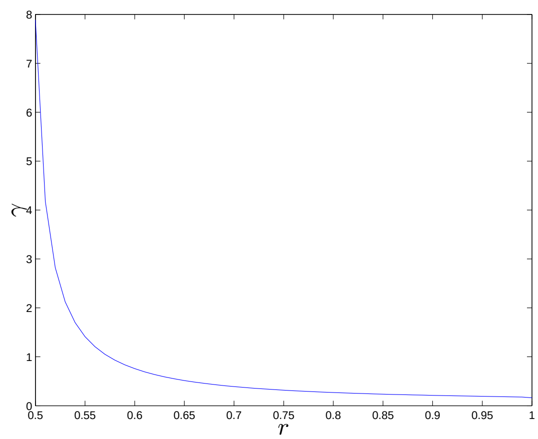

Figura 4.10: Valores γ de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dados pelo Teorema 4.7 para o sistema UPS da Figura 4.6 com carga mostrada na Figura 4.7 para uma alocação de pólos com centro $c = 0$, em função do raio r.

Note que o valor do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ aumenta à medida que a alocação de pólos se torna mais restritiva (i.e., quando r diminui) e o compromisso entre rapidez da resposta transitória e capacidade de rejeição de perturbações deve ser levado em conta pelo projetista.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Nesta tese foram apresentadas condições convexas na forma de LMIs para a solução de problemas de análise de estabilidade, cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$, e para o cálculo de ganhos dependentes de parâmetros para leis de controle por realimentação de estados capazes de assegurar a estabilidade incluindo critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo pertencentes a um politopo (casos contínuo e discreto). Os resultados são diretamente aplicáveis a sistemas lineares com dependência afim em parâmetros variantes no tempo, desde que os parâmetros sejam limitados. Também foram apresentadas condições do tipo LMI para a determinação de ganhos chaveados para estabilização incluindo critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e especificações de alocação de pólos para sistemas chaveados lineares com funções de chaveamento arbitrárias. Os resultados fornecidos são baseados em funções de Lyapunov. Exemplos numéricos ilustraram como as condições propostas reduzem o conservadorismo dos problemas de análise e síntese, podendo tratar inclusive controle com restrições de estrutura e controle sob falhas de atuadores.

5.1 Contribuições

Dezesseis problemas de análise e de síntese foram enunciados no Capítulo 2 e soluções para cada um dos problemas foram apresentadas nos capítulos 3 e 4. Com respeito a sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo pertencentes a um politopo, caso contínuo, as principais contribuições são:

- uma condição LMI (Teorema 3.1) para a verificação da estabilidade do sistema incerto sujeito a taxas de variações paramétricas limitadas que é menos conservadora do que a estabilidade quadrática e que pode produzir melhores avaliações do domínio de estabilidade do que condições baseadas na chamada multiconvexidade [43]. A condição apresentada pode ser vista como uma extensão de [97] para tratar o caso de sistemas variantes no tempo, permitindo inclusive avaliar os domínios de estabilidade de sistemas no caso em que as taxas de variações paramétricas não são conhecidas *a priori*;

- uma condição do tipo LMI (Teorema 3.2) para o cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema incerto com parâmetros sujeitos a taxas de variação limitadas. No caso de sistemas quadraticamente estáveis, a condição apresentada no Teorema 3.2 permite obter estimativas de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ menores (para taxas de variação dos parâmetros limitadas) ou iguais (para taxas de variação arbitrariamente grandes dos parâmetros) do que as obtidas pela estabilidade quadrática. No caso de sistemas que não são quadraticamente estáveis, a condição do Teorema 3.2 pode computar custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ levando em consideração limitantes nas taxas de variação dos parâmetros ρ_i, $i = 1, \ldots, N-1$, com exemplos mostrando inclusive que é possível obter estimativas de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ finitas considerando taxas de variação arbitrariamente grandes em alguns dos parâmetros do sistema;

- uma condição do tipo LMI (Teorema 3.3) para a determinação de um ganho LPV para a lei de controle por realimentação de estados que garante a estabilidade do sistema em malha fechada sujeito a taxas de variações paramétricas arbitrárias. O ganho LPV calculado através do Teorema 3.3 é capaz de estabilizar quadraticamente o sistema em casos em que o Lema 2.3 não fornece ganho fixo quadraticamente estabilizante ao preço de se conhecer os parâmetros $\alpha(t)$ em tempo real para implementar a estratégia LPV. A condição do Teorema 3.3 é válida para o caso em que as matrizes $(A, B_2)(\alpha(t))$ são supostas variantes no tempo de forma arbitrária, o que representa uma extensão de resultados anteriores da literatura nos quais algumas matrizes do sistema devem ser invariantes no tempo para tornar o problema de síntese convexo e evitar interpolações;

- uma condição descrita em termos de LMIs para o cômputo de um ganho não-linearmente dependente de parâmetros para a lei de controle por realimentação de estados que estabiliza o sistema sujeito a taxas de variação limitadas nos parâmetros (Teorema 3.4). A estratégia de controle resultante é um estratégia de ganho escalonado em que o ganho é calculado como uma função analítica do vetor de parâmetros $\alpha(t)$, suposto conhecido em tempo real, sem a necessidade de discretização do espaço paramétrico, o que difere de estratégias convencionais de ganho escalonado baseadas em interpolação. Os limitantes das taxas de variação dos parâmetros do sistema são levados em conta nas condições de síntese do Teorema 3.4, que podem ser factíveis em casos nos quais o sistema não é quadraticamente estabilizável. Em casos nos quais o sistema é quadraticamente estabilizável, as condições do Teorema 3.4 são factíveis para ρ_i, $i = 1, \ldots, N-1$ arbitrariamente grandes, com solução tendendo para um ganho do tipo LPV. Além disso, é possível utilizar as condições do Teorema 3.4 para inspeção dos domínios de estabilizabilidade do sistema quando limitantes nas taxas de variações paramétricas não são dados *a priori*, bem como analisar a estabilizabilidade de sistemas com dependência afim nos parâmetros variantes no tempo;

- uma condição LMI (Teorema 3.5) para resolver o problema de síntese de um ganho LPV que estabiliza o sistema em malha fechada com um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o caso em que as matrizes $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(t))$ estão sujeitas a taxas de variações paramétricas arbitrárias e $\alpha(t)$ é suposto disponível em tempo real para realimentação. Utilizando funções de Lyapunov quadráticas, o ganho LPV computado pelas condições do Teorema 3.5 permite melhorar o desempenho do sistema em relação àquele baseado em ganhos fixos obtidos pelo Lema 2.4;

- uma condição na forma de LMIs (Teorema 3.6) para a síntese de um ganho dependente de parâmetros de forma não-linear que assegura a estabilidade do sistema em malha fechada com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ para o caso em que as matrizes $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(t))$ estão sujeitas a taxas de variações paramétricas limitadas. A condição do Teorema 3.6 permite estabilizar o sistema com melhores índices de desempenho (menores valores de γ) do que condições baseadas na estabilidade quadrática (Lema 2.4: ganhos fixos e Teorema 3.5: ganhos LPV) quando os limitantes nas taxas de variação dos parâmetros são conhecidos *a priori* e $\alpha(t)$ está disponível em tempo real, ao preço da implementação de uma estratégia de ganhos dependentes de parâmetros de forma não-linear.

Em relação a sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo pertencentes a um politopo, caso discreto, as principais contribuições são:

- uma condição LMI (Teorema 3.7) para a determinação de um ganho dependente de parâmetros de forma não-linear para uma lei de controle por realimentação de estados que assegura a estabilidade do sistema em malha fechada com matrizes $(A, B_2)(\alpha(k))$ com taxas de variações paramétricas arbitrárias. A condição do Teorema 3.7 permite tratar de forma convexa do cômputo de ganhos dependentes de parâmetros para o caso em que a matriz de controle $B_2(\alpha(k))$ é variante no tempo, o que representa um avanço em relação à condição de estabilizabilidade de [24] (Lema 2.10) que trata do cômputo de ganhos dependentes de parâmetros para o caso particular em que B_2 é uma matriz fixa e invariante no tempo. A condição apresentada aqui também permite obter resultados menos conservadores na avaliação dos domínios de estabilizabilidade do que a condição proposta em [78], que trata do cômputo de ganhos fixos para o caso de matrizes $(A, B_2)(\alpha(k))$ com variações paramétricas arbitrárias. O preço da redução do conservadorismo na estabilização do sistema é a implementação de uma estratégia de ganhos escalonados (Teorema 3.7), que depende do conhecimento do vetor de parâmetros $\alpha(k)$ em tempo real, ao invés de uma estratégia de ganho robusto [78];

- a extensão da condição descrita no item anterior para tratar o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema com matrizes $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2)(\alpha(k))$ com taxas de variações paramétricas arbitrárias

(Teorema 3.8), com $\alpha(k)$ suposto disponível em tempo real, permitindo abordar o problema de síntese para matrizes de controle $(B_2, D_2)(\alpha(k))$ variantes no tempo, que não é tratável pelo Lema 2.12 (síntese de ganhos LPV para matrizes de controle invariantes no tempo) e obter resultados menos conservadores, estabilizando o sistema em malha fechada com menores valores de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do que as condições do Corolário 3.4.

As contribuições relativas a sistemas chaveados lineares contínuos no tempo com funções de chaveamento arbitrárias não conhecidas *a priori* mas disponíveis em tempo real são:

- uma condição LMI (Teorema 4.1) para o cálculo de ganhos chaveados que estabilizam quadraticamente o sistema em malha fechada, contendo a condição da estabilizabilidade quadrática com ganhos fixos (Lema 2.3). A condição do Teorema 4.1 permite estabilizar quadraticamente alguns sistemas chaveados para os quais a condição do Lema 2.3 não fornece um ganho fixo estabilizante, estendendo as estimativas do domínio de estabilizabilidade baseado em funções de Lyapunov quadráticas;

- a extensão da condição do item anterior para tratar o problema de cômputo de ganhos chaveados que estabilizam quadraticamente o sistema em malha fechada com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ (Teorema 4.2), que é sempre menor ou igual ao custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ computado pela estabilizabilidade quadrática com ganhos fixos (Lema 2.4), permitindo melhorar o desempenho do sistema em malha fechada ao preço da implementação de uma estratégia de controle com ganhos chaveados;

- uma condição descrita em termos de LMIs (Teorema 4.3) para a determinação de ganhos chaveados que estabilizam o sistema em malha fechada para funções de chaveamento arbitrárias, garantindo a alocação dos pólos de cada subsistema linear $A_j + B_{2j}K_j$, $j = 1, \ldots, N$ no círculo $\mathcal{C}_c$ da Figura 2.1. A resposta transitória devido às comutações de um subsistema para outro exibirá sobre-sinal, tempo de acomodação e freqüência de oscilação determinados pela escolha dos parâmetros d e r da alocação de pólos sempre que o intervalo de tempo entre dois instantes de chaveamento consecutivos for longo o suficiente para permitir a acomodação dos modos de cada subsistema. Caso contrário, se o sistema estiver sujeito a seqüências de chaveamento arbitrariamente rápidas, a existência de ganhos chaveados calculados pela condição do Teorema 4.3 garante a estabilidade em malha fechada. Os resultados do Teorema 4.3 são menos conservadores do que os do Lema 2.13 (alocação de pólos com ganhos fixos quadraticamente estabilizantes), permitindo alocações mais restritas ao preço da implementação de uma técnica de controle com ganhos chaveados;

- a combinação dos resultados de estabilização com alocação de pólos e de controle $\mathcal{H}_\infty$ para obter uma condição LMI (Teorema 4.4) capaz de calcular ganhos chaveados que estabilizam quadraticamente o sistema em malha fechada, permitindo incorporar especificações de resposta transitória e de rejeição de perturbações no projeto do controlador.

A respeito de sistemas chaveados lineares discretos no tempo com funções de chaveamento arbitrárias não conhecidas *a priori* mas disponíveis em tempo real, as contribuições são:

- uma condição do tipo LMI (Corolário 3.4) para o cômputo de um ganho robusto (nesse caso, não é necessário conhecer a função de chaveamento) que assegura a estabilidade do sistema em malha fechada com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ para o caso em que todas as matrizes são consideradas chaveadas. A condição do Corolário 3.4 foi derivada para sistemas variantes no tempo como uma extensão dos resultados de estabilizabilidade de [78] e é diretamente aplicável a sistemas chaveados;

- a extensão da condição de cômputo de ganhos chaveados estabilizantes apresentada no Lema 2.14 para uma condição LMI de projeto de ganhos chaveados que assegurem a estabilidade em malha fechada e um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ (Teorema 4.5) para o caso em que todas as matrizes do sistema são supostas chaveadas;

- uma condição do tipo LMI (Teorema 4.6) de projeto de ganhos chaveados que garantem a estabilidade do sistema chaveado em malha fechada com especificações de alocação de pólos no círculo $\mathcal{C}_d$ da Figura 2.2 que permite especificações de desempenho mais restritas do que as obtidas com ganhos fixos calculados pela condição do Lema 2.13;

- a combinação das condições descritas nos dois itens anteriores (Teorema 4.7) para tratar o projeto de ganhos chaveados que estabilizam o sistema com todas as matrizes chaveadas impondo especificações de alocação de pólos e assegurando um certo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ em malha fechada.

As condições convexas descritas na forma de LMIs fornecidas nos capítulos 3 e 4 podem ser diretamente aplicadas a problemas de controle usuais como o controle descentralizado e a realimentação de saída bastando impor estruturas apropriadas nas matrizes que são as variáveis dos problemas (veja corolários 3.1 e 3.2). Outro problema tratável diretamente pelas condições apresentadas é o controle sob falhas parciais ou totais de atuadores, abordados nos corolários 3.3 e 4.1.

As tabelas 5.1 e 5.2 sumarizam os problemas abordados na tese, com uma descrição resumida do foco de cada problema e das hipóteses assumidas, descrevendo as condições propostas para a solução de cada um dos problemas e os comentários pertinentes.

Problema	Descrição	Hipótese	Contribuição	Comentários
2.1	estabilidade	H1	Teorema 3.1	3.1 a 3.7
2.2	custo garantido $\mathcal{H}_\infty$	H1	Teorema 3.2	3.1 a 3.8
2.3	estabilizabilidade	H2	Teorema 3.3	3.9 a 3.13
2.4	estabilizabilidade	H3	Teorema 3.4	3.6, 3.14 a 3.18
2.5	controle $\mathcal{H}_\infty$	H2	Teorema 3.5	3.9 a 3.12, 3.19
2.6	controle $\mathcal{H}_\infty$	H3	Teorema 3.6	3.6, 3.14 a 3.18, 3.20
2.7	estabilizabilidade	H4	Teorema 3.7	2.12, 3.21 a 3.23
2.8	controle $\mathcal{H}_\infty$	H4	Teorema 3.8	2.12, 3.21 a 3.23

Tabela 5.1: Sumário dos resultados da tese para sistemas lineares variantes no tempo. H1: parâmetros $\alpha(t)$ incertos e taxas de variações $\dot{\alpha}(t)$ limitadas; H2: parâmetros $\alpha(t)$ conhecidos em tempo real e taxas de variações $\dot{\alpha}(t)$ arbitrárias; H3: parâmetros $\alpha(t)$ conhecidos em tempo real e taxas de variações $\dot{\alpha}(t)$ limitadas; H4: parâmetros $\alpha(k)$ conhecidos em tempo real e taxas de variações $\Delta\alpha(k)$ arbitrárias.

Problema	Descrição	Hipótese	Contribuição	Comentários
2.9	estabilizabilidade	H5	Teorema 4.1	3.11, 4.1
2.10	controle $\mathcal{H}_\infty$	H5	Teorema 4.2	3.11, 4.1, 4.2
2.11	estabilização com alocação de pólos	H5	Teorema 4.3	3.11, 4.1, 4.3 a 4.5
2.12	controle $\mathcal{H}_\infty$ com alocação de pólos	H5	Teorema 4.4	3.11, 4.1 a 4.5
2.13	controle $\mathcal{H}_\infty$ robusto	H6	Corolário 3.4	3.24
2.14	controle $\mathcal{H}_\infty$	H7	Teorema 4.5	2.18, 2.20, 4.6
2.15	estabilização com alocação de pólos	H7	Teorema 4.6	2.18, 4.7 a 4.9
2.16	controle $\mathcal{H}_\infty$ com alocação de pólos	H7	Teorema 4.7	2.18, 4.7 a 4.9

Tabela 5.2: Sumário dos resultados da tese para sistemas chaveados lineares. H5: função de chaveamento $\xi(t)$ arbitrária, conhecida em tempo real; H6: função de chaveamento $\xi(k)$ arbitrária e incerta; H7: função de chaveamento $\xi(k)$ arbitrária, conhecida em tempo real.

5.2 Perspectivas de trabalhos futuros

Algumas possíveis extensões dos resultados da tese são:

- utilização de funções de Lyapunov $v(x(t)) = x(t)'P(\alpha(t))x(t)$, cujas matrizes $P(\alpha(t))$ apresentam dependência polinomial nos parâmetros para reduzir o conservadorismo das condições de análise e síntese apresentadas para sistemas lineares variantes no tempo no caso contínuo com parâmetros pertencentes a um politopo sujeitos a taxas de variação limitadas. Estudos já realizados com funções polinomiais homogêneas para o caso de sistemas lineares incertos invariantes no tempo mostram que o conservadorismo dos resultados diminui à medida que se aumenta o grau da função de Lyapunov. A extensão para o caso variante no tempo foi inspecionada, utilizando a mesma metodologia apresentada na tese. Por exemplo, para um caso de um sistema com dois vértices utilizando função de Lyapunov homogênea polinomial de grau dois dada por

  $$P(\alpha(t)) = \alpha_1(t)^2 P_1 + \alpha_1(t)\alpha_2(t)P_{12} + \alpha_2(t)^2 P_2$$

  com

  $$\alpha_1(t), \alpha_2(t) \geq 0 \quad , \quad \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = 1 \quad , \quad P_1 = P_1' > 0 \quad , \quad P_{12} = P_{12}' > 0 \quad , \quad P_2 = P_2' > 0$$

  os resultados obtidos são menos conservadores do que os da estabilidade quadrática ($P(\alpha(t)) = P$), do que os resultados obtidos pela condição do Teorema 3.1 ($P(\alpha(t))$ na forma afim) e do que resultados baseados na estabilidade biquadrática [111] e na multiconvexidade [43];

- cômputo de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e de ganhos de realimentação de estados que assegurem a estabilidade do sistema em malha fechada com um desempenho $\mathcal{H}_2$ pré-especificado;

- aprofundar o estudo dos problemas de controle sob falhas parciais ou totais de atuadores, aplicando os resultados da tese a sistemas físicos, por exemplo. É possível também explorar a idéia que cada um dos vértices de um politopo represente o sistema sujeito a uma possível combinação de falhas de atuadores, sendo que um dos vértices representaria o caso do sistema sem falhas, e avaliar as condições de projeto apresentadas na tese nos teoremas 3.4 e 3.6 para apenas algumas combinações de sinais $\pm$;

- a obtenção de condições na forma de LMIs para verificação da estabilidade de sistemas chaveados sujeitos a um tempo de permanência dado em cada subsistema e também a determinação de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ para esses sistemas utilizando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, como apontado nos resultados obtidos para uma classe de sistemas chaveados não-ideais em [80];

- cômputo de ganhos chaveados para estabilização, alocação de pólos e controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas chaveados lineares com funções de chaveamento arbitrárias cujos subsistemas lineares são incertos. A idéia é obter um conjunto de ganhos chaveados em que cada ganho estabilize robustamente um subsistema incerto e o conjunto de ganhos estabilize quadraticamente o sistema chaveado;

- a extensão dos resultados de estabilidade e estabilizabilidade aplicados a sistemas discretos no tempo [73] para o caso de sistemas chaveados lineares e para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo de forma arbitrária sujeitos a atrasos nas variáveis de estado. Estudos preliminares utilizando funcionais de Lyapunov-Krasovskii já foram feitos, fornecendo bons resultados para essa classe de sistemas.

5.3 Publicações

As publicações em temas diretamente ligados ao assunto da tese são:

V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite e P. L. D. Peres. An LMI approach for $\mathcal{H}_\infty$ linear parameter-varying state feedback control. Aceito para publicação na *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*

V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Robust stability and $\mathcal{H}_\infty$ performance of linear time-varying systems in polytopic domains. *International Journal of Control*, 77(15):1343–1352, Outubro 2004

V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Robust state feedback control of uncertain discrete-time systems with almost deadbeat response. Aceito para publicação no 8^o *Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência*, Recife, PE, Junho 2005

V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite e P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ switched control with pole location constraints applied to a UPS system. Aceito para publicação no 8^o *Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência 2005*, Recife, PE, Junho 2005

V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Estabilidade de sistemas lineares variantes no tempo através de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Setembro 2004

V. F. Montagner, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira e P. L. D. Peres. Controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados linear variante com parâmetros: uma abordagem LMI. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Setembro 2004

V. F. Montagner e P. L. D. Peres. State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pp. 2004–2009, Boston, MA, Junho/Julho 2004

V. F. Montagner, V. J. S. Leite e P. L. D. Peres. Design of a switched control with pole location constraints for a UPS system. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics – ISIE 2004*, pp. 441–446, Ajaccio, France, Maio 2004

V. F. Montagner e P. L. D. Peres. A new LMI condition for the robust stability of linear time-varying systems. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, pp. 6133–6138, Maui, HI, USA, Dezembro 2003

V. F. Montagner, V. J. S. Leite e P. L. D. Peres. Robust control of discrete time switched systems with pole location and structural constraints. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, pp. 6242–6247, Maui, HI, USA, Dezembro 2003

V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Robust state feedback control applied to a UPS system. In *Proceedings of the IEEE Industrial Electronics Society Conference – IECON 2003*, volume 3, pp. 2245–2250, Roanoke, VA, Novembro 2003

V. F. Montagner e P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ control with pole location for a DC-DC converter with a switched load. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics – ISIE 2003*, volume 1, pp. 550–555, Rio de Janeiro, Junho 2003

V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Robust pole location for a DC-DC converter through parameter dependent control. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems – ISCAS 2003*, volume 3, pp. 351–354, Bangkok, Thailand, Maio 2003

Outras publicações relacionadas com o tema da tese são:

V. F. Montagner, V. J. S. Leite, S. Tarbouriech e P. L. D. Peres. Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay. Aceito para publicação na *2005 American Control Conference*

P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(6):1053–1061, Junho 2004

P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5):305–315, Abril 2004

V. J. S. Leite, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *Revista Controle & Automação da SBA*, 15(2):127–134, Abr/Mai/Jun 2004

V. J. S. Leite, V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira e P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Revista Controle & Automação da SBA*, 15(1):24–40, Jan/Fev/Mar 2004

P. J. de Oliveira, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Determinação do custo garantido $\mathcal{H}_2$ por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Setembro 2004

R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, P. J. de Oliveira, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Cômputo de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Setembro 2004

P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent lyapunov functions. In *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design – ROCOND 2003*, volume 1, pp. 19–24, Milan, Italy, 2003

V. J. S. Leite, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Robust pole location by parameter dependent state feedback control. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1864–1869, Las Vegas, Dezembro 2002

P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: a numerical comparison. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 644–649, Las Vegas, Dezembro 2002

V. J. S. Leite, V. F. Montagner, D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas contínuos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 2878–2883, Natal, RN, Setembro 2002

P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 2884–2889, Natal, RN, Setembro 2002

V. J. S. Leite, V. F. Montagner e P. L. D. Peres. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. In *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 2450–2455, Natal, RN, Setembro 2002

Referências Bibliográficas

[1] H. L. S. Almeida, A. Bhaya, D. M. Falcão, and E. Kaszkurewicz. A team algorithm for robust stability analysis and control design of uncertain time-varying linear systems using piecewise quadratic Lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11:357–371, 2001.

[2] F. Amato, M. Corless, M. Mattei, and R. Setola. A multivariable stability margin in the presence of time-varying, bounded rate gains. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7:127–143, 1997.

[3] P. Apkarian and R. J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1):21–32, 1998.

[4] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):853–864, May 1995.

[5] P. Apkarian and H. D. Tuan. Parametrized LMIs in control theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4):1241–1264, May 2000.

[6] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.

[7] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1995. Second edition.

[8] D. V. Balandin and M. M. Kogan. An optimization algorithm for checking feasibility of robust H-infinity-control problem for linear time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 77(5):498–503, March 2004.

[9] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46:399–408, 1985.

[10] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, USA, 1994.

[11] B. R. Barmish and C. L. DeMarco. A new method for improvement of robustness bounds for linear states equations. In *Proceedings of the 1986 Conference on Information Science and Systems*, pages 115–120, Princeton, NJ, 1986.

[12] G. Becker and A. Packard. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, 23:205–215, 1994.

[13] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1):65–72, January 1989.

[14] F. Blanchini. The gain scheduling and the robust state feedback stabilization problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11):2061–2070, November 2000.

[15] F. Blanchini and S. Miani. On the transient estimate for linear systems with time-varying uncertain parameters. 43(7):592–596, July 1996.

[16] P.-A. Bliman. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(6):2016–2042, 2004.

[17] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.

[18] S. P. Boyd and C. H. Barratt. *Linear Control Design: Limits of Performance*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.

[19] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):475–482, April 1998.

[20] S. Buso, S. Fasolo, and P. Mattaveli. Uninterruptible power supply multiloop control employing digital predictive voltage and current regulators. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 37(6):1846–1854, November/December 2001.

[21] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties. *Automatica*, 39(6):1027–1035, June 2003.

[22] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Robust stability of polytopic systems via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4670–4675, Maui, HI, USA, December 2003.

[23] C. Courties, J. Bernussou, and G. Garcia. LPV control by dynamic output feedback. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, volume 4, pages 2267–2271, San Diego, CA, June 1999.

[24] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5):355–359, August 2001.

[25] J. Daafouz and J. Bernussou. Poly-quadratic stability and $\mathcal{H}_\infty$ performance for discrete systems with time varying uncertainties. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 267–272, 2001.

[26] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11):1883–1887, November 2002.

[27] J. de Oliveira, A. Trofino, and C. E. de Souza. Análise e síntese $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV. *Revista Controle & Automação da SBA*, 13(1):18–24, 2002.

[28] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.

[29] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1–3):27–38, June 1999.

[30] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5):305–315, April 2004.

[31] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(6):1053–1061, June 2004.

[32] R. A. DeCarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1069–1082, July 2000.

[33] M. Dettori and C. W. Scherer. New robust stability and performance conditions based on parameter dependent multipliers. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4187–4192, Sydney, Australia, December 2000.

[34] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, 1992.

[35] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. Francis. State space solutions to the standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, August 1989.

[36] L. El Ghaoui and S. I. Niculescu, editors. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[37] G. Feng. Controller design and analysis of uncertain piecewise-linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, 49(2):224–232, February 2002.

[38] G. Feng. Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7):1108–1112, July 2002.

[39] G. Feng and C. J. Harris. Piecewise Lyapunov stability conditions of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 31(2):259–262, April 2001.

[40] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041–1046, July 1996.

[41] B. A. Francis. *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*, volume 88 of *Lectures Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1987.

[42] M. Fu and S. Dasgupta. Parametric Lyapunov functions for uncertain systems: The multiplier approach. In L. El Ghaoui and S. I. Niculescu, editors, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, Advances in Design and Control, pages 95–108. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[43] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, March 1996.

[44] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.

[45] J. C. Geromel. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1):168–175, 1999.

[46] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80, December 1998.

[47] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(2):381–402, March 1991.

[48] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. de Souza. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 19:23–27, 1992.

[49] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems with prescribed $\mathcal{H}_\infty$ norm bounds. In *Proceedings of the 1st IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems*, volume 1, pages 302–307, Zurich, Switzerland, 1991.

[50] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 57(4):853–864, April 1993.

[51] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1072–1075, May 1994.

[52] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. A convex approach to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for discrete-time uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(6):1816–1833, November 1995.

[53] K. P. Gokhale, A. Kawamura, and R. G. Hoft. Dead beat microprocessor control of PWM inverter for sinusoidal output waveform synthesis. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 23(5):901–910, September/October 1987.

[54] C.-S. Gómez Quintero, I. Queinnec, and M. Spérandio. A reduced linear model of an activated sludge process. In *9th IFAC International Symposium on Computer Applications in Biotechnology*, Nancy, France, March 2004.

[55] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1):54–69, January 1992.

[56] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Parameter-dependent Lyapunov functions and the Popov Criterion in robust analysis and synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):536–543, 1995.

[57] T. Haneyoshi, A. Kawamura, and R. G. Hoft. Waveform compensation of PWM inverter with cyclic fluctuating loads. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 24(4):582–589, July/August 1988.

[58] J. P. Hespanha, D. Liberzon, and A. S. Morse. Overcoming the limitations of adaptive control by means of logic-based switching. *Systems & Control Letters*, 49(1):49–65, May 2003.

[59] B. Hu, X. Xu, A. N. Michel, and P. J. Antsaklis. Robust stabilizing control laws for a class of second-order switched systems. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, volume 4, pages 2960–2964, San Diego, CA, June 1999.

[60] T. Iwasaki. Robust performance analysis for systems with structured uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:85–99, March 1996.

[61] T. Iwasaki and G. Shibata. LPV system analysis with quadratic separator for uncertain implicit systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1195–1208, August 2001.

[62] Z. Ji, L. Wang, G. Xie, and F. Hao. Linear matrix inequality approach to quadratic stabilisation of switched systems. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 151(3):289–294, 2004.

[63] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems — A Computational Approach*, volume 284 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2003.

[64] I. Kaminer, P. P. Khargonekar, and M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems via convex optimization. *Automatica*, 29(1):57–70, January 1993.

[65] J. G. Kassakian, M. F. Schlecht, and G. C. Verghese. *Principles of Power Electronics*. Addison-Wesley, Boston, MA, 1991.

[66] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

[67] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7):824–837, July 1991.

[68] I. E. Köse, F. Jabbari, and W. E. Schmitendorf. A direct characterization of L-2-gain controllers for LPV systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(9):1302–1307, September 1998.

[69] M. A. Leal and J. S. Gibson. A first-order Lyapunov robustness method for linear systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35:1068–1070, 1990.

[70] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Revista Controle & Automação da SBA*, 15(1):24–40, Janeiro/Março 2004.

[71] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Robust pole location by parameter dependent state feedback control. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1864–1869, Las Vegas, December 2002.

[72] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust $\mathcal{D}$-stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):500–504, March 2003.

[73] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 2870–2875, June/July 2004.

[74] D. J. Leith and W. E. Leithead. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, 73(11):1001–1025, July 2000.

[75] D. J. Leith, R. N. Shorten, W. E. Leithead, O. Mason, and P. Curran. Issues in the design of switched linear control systems: a benchmark study. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 17(2):103–118, March 2003.

[76] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5):59–70, October 1999.

[77] L. Malesani, P. Matavelli, and S. Buso. Robust dead-beat current control for PWM rectifiers and filters. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 35(3):613–620, May/June 1999.

[78] W. J. Mao. Robust stabilization ofuncertain time-varying discrete systems and comments on "an improved approach for constrained robust model predictive control". *Automatica*, 39(6):1109–1112, June 2003.

[79] V. F. Montagner, E. G. Carati, and H. A. Gründling. Design and analysis of a linear quadratic regulator with repetitive controller for AC power supplies. In *2003 IEEE International Symposium on Industrial Electronics, ISIE-2003*, volume 3, pages 109–114, Rio de Janeiro, Brazil, June 2003.

[80] V. F. Montagner and P. L. D. Peres. A new LMI condition for the robust stability of linear time-varying systems. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6133–6138, Maui, HI, USA, December 2003.

[81] T. Mori and H. Kokame. A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1516–1519, August 2000.

[82] K. S. Narendra and J. Balakrishnan. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12):2469–2471, December 1994.

[83] K. S. Narendra and S. S. Tripathi. Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 10, 1973.

[84] S.-I. Niculescu. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2001.

[85] A. Packard. Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems & Control Letters*, 22(2):79–92, February 1994.

[86] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering design with pole constraints for discrete-time systems: an LMI approach. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, volume 1, pages 4418–4422, San Diego, CA, June 1999.

[87] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering design with pole placement constraint via LMIs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102(2):239–261, August 1999.

[88] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance — an LMI approach. *Automatica*, 36(6):851–858, June 2000.

[89] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188, February 1997.

[90] D. Peaucelle and D. Arzelier. Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4):624–630, April 2001.

[91] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.

[92] P. Peleties and R. A. DeCarlo. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions. In *Proceedings of the 1991 American Control Conference*, volume 2, pages 1679–1684, Boston, MA, June 1991.

[93] P. L. D. Peres and J. C. Geromel. $\mathcal{H}_2$ control for discrete-time systems: optimality and robustness. *Automatica*, 29(1):225–228, January 1993.

[94] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 20(6):413–418, June 1993.

[95] S. Pettersson and B. Lennartson. Stability and robustness for hybrid systems. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1202–1207, Kobe, Japan, December 1996.

[96] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378, August 2001.

[97] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.

[98] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4):629–637, April 2000.

[99] W. J. Rugh and J. S. Shamma. Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10):1401–1425, October 2000.

[100] A. V. Savkin and R. J. Evans. *Hybrid Dynamical Systems. Controller and Sensor Switching Problems.* Birkhäuser, Boston, MA, 2002.

[101] A. V. Savkin, E. Skafidas, and R. J. Evans. Robust output feedback stabilizability via controller switching. *Automatica*, 35(1):69–74, January 1999.

[102] C. W. Scherer. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37(3):361–375, March 2001.

[103] G. Scorletti and L. El Ghaoui. Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(10):845–877, August 1998.

[104] J. S. Shamma and M. Athans. Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. *Automatica*, 27(3):559–564, 1991.

[105] J. S. Shamma and M. Athans. Gain scheduling: potential hazards and possible remedies. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3):101–107, June 1992.

[106] E. Skafidas, R. J. Evans, A. V. Savkin, and I. Petersen. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, 35(4):553–564, April 1999.

[107] D. J. Stilwell and W. J. Rugh. Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(6):1225–1229, June 1999.

[108] Z. D. Sun and S. S. Ge. Dynamic output feedback stabilization of a class of switched linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, 50(8):1111–1115, August 2003.

[109] Z. D. Sun, S. S. Ge, and T. H. Lee. Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica*, 38(5):775–786, May 2002.

[110] A. Trofino. Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 2341–2346, Phoenix, AZ, December 1999.

[111] A. Trofino and C. E. de Souza. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1303–1307, August 2001.

[112] Y. Y. Tzou, R. S. Ou, S. L. Jung, and M. Y. Chang. High-performance programmable AC power source with low harmonic distortion using DSP-based repetitive control technique. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 12(4):715–725, July 1997.

[113] F. Wang and V. Balakrishnan. Improved stability analysis and gain-scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):720–734, May 2002.

[114] F. Wu. A generalized LPV system analysis and control synthesis framework. *International Journal of Control*, 74(7):745–759, May 2001.

[115] F. Wu and B. Lu. On convexified robust control synthesis. *Automatica*, 40(6):1003–1010, June 2004.

[116] F. Wu, X. H. Yang, A. Packard, and G. Becker. Induced $\mathcal{L}_2$-norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:983–998, 1996.

[117] G. Xie and L. Wang. Controllability and stabilizability of switched linear-systems. *Systems & Control Letters*, 48(2):135–155, February 2003.

[118] L. Xie, S. Shishkin, and M. Fu. Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. *Systems & Control Letters*, 31(3):165–171, August 1997.

[119] G. S. Zhai, H. Lin, and P. J. Antsaklis. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Control*, 76(7):747–753, May 2003.

[120] X. L. Zhang and J. Zhao. An algorithm of uniform ultimate boundedness for a class of switched linear systems. *International Journal of Control*, 75(16-17):1399–1405, November 2002.